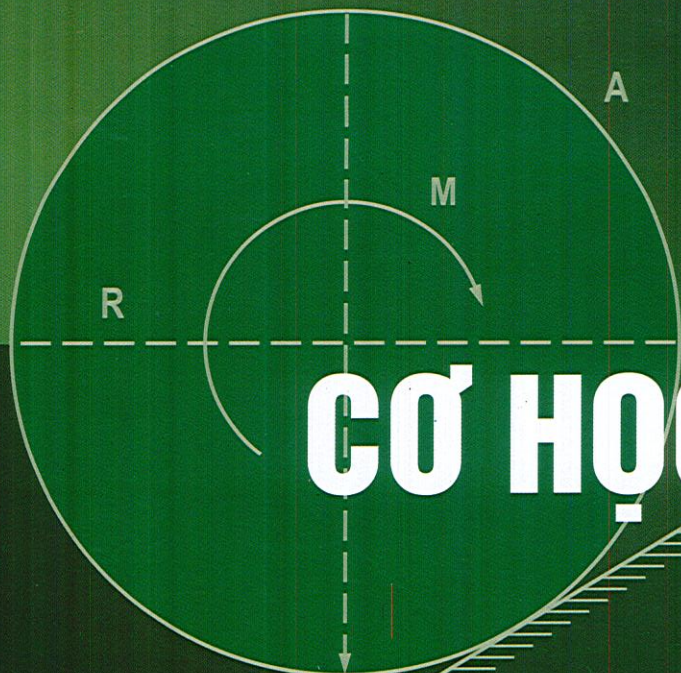


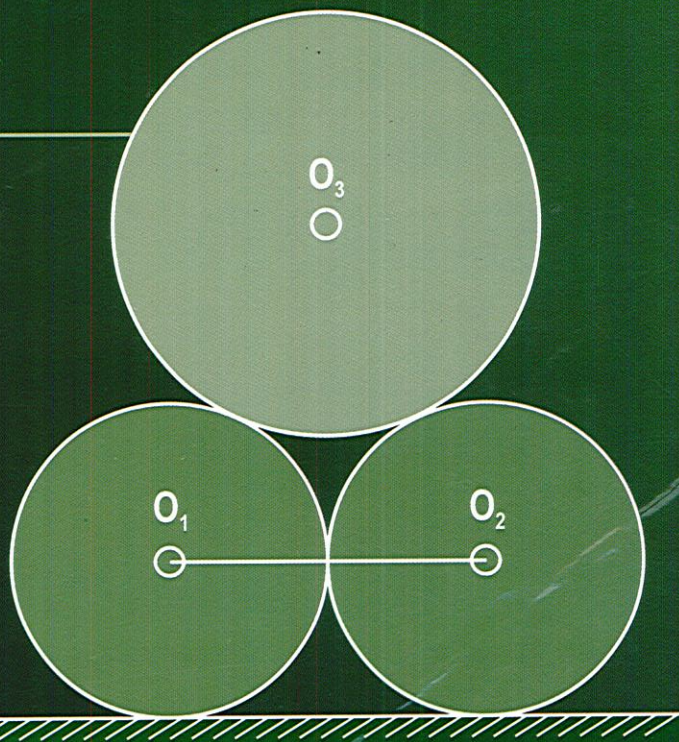
X2 41

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KIẾN TRÚC HÀ NỘI
PGS. TS. ĐẶNG QUỐC LƯƠNG



CƠ HỌC CƠ SỞ[?]

TẬP I : TĨNH HỌC



NHÀ XUẤT BẢN XÂY DỰNG



THƯ VIỆN
HUBT

TÀI LIỆU PHỤC VỤ THAM KHẢO NỘI BỘ



**THƯ VIỆN
HUBT**

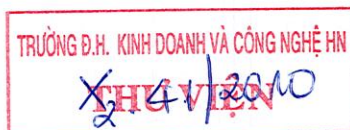
TÀI LIỆU PHỤC VỤ THAM KHẢO NỘI BỘ

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KIẾN TRÚC HÀ NỘI
PGS. TS. ĐẶNG QUỐC LƯƠNG

CƠ HỌC CƠ SỞ[?]

TẬP I : TÍNH HỌC

(Tái bản)



NHÀ XUẤT BẢN XÂY DỰNG
HÀ NỘI - 2009





**THƯ VIỆN
HUBT**

TÀI LIỆU PHỤC VỤ THAM KHẢO NỘI BỘ

LỜI NÓI ĐẦU

Cơ học cơ sở là môn học cơ sở cho sinh viên các trường đại học kỹ thuật.

Hiện nay trong các trường đại học, môn học này có các tên gọi khác nhau như cơ học lý thuyết, cơ học, cơ học kỹ thuật. Năm 2006, Trường Đại học Kiến trúc Hà Nội căn cứ vào chương trình khung đào tạo đại học của Bộ Giáo dục và Đào tạo, đã ban hành chương trình giảng dạy cho các ngành học của trường, trong đó môn học này có tên gọi là Cơ học cơ sở.

Với chủ trương rút ngắn thời gian đào tạo đại học, thời lượng dành cho môn học vì vậy cũng phải giảm đi. Môn Cơ học cơ sở cho ngành Xây dựng dân dụng và công nghiệp, Công trình ngầm là ngành có thời lượng nhiều nhất còn 75 tiết và cho các ngành Kiến trúc, Quy hoạch, Quản lý đô thị chỉ còn 30 tiết. Vì lý do đó chúng tôi biên soạn lại giáo trình này để phù hợp với thời lượng dành cho môn học.

Giáo trình Cơ học cơ sở gồm 2 tập:

Tập 1: Tĩnh học, thời lượng 30 tiết dành cho tất cả các ngành học

Tập 2: Động học và Động lực học, thời lượng 45 tiết dành cho các ngành Xây dựng, Kỹ thuật hạ tầng và Môi trường đô thị.

Trong mỗi tập, phần đầu là lý thuyết kèm theo các ví dụ, phần cuối là các bài tập rèn luyện kỹ năng tính toán.

Để rút ngắn thời gian giảng dạy trên lớp mà sinh viên vẫn hiểu được lý thuyết và biết cách giải các bài tập, chúng tôi đưa ra nhiều ví dụ minh họa. Một số ví dụ được giảng dạy trên lớp, số còn lại sinh viên có thể tự đọc ở nhà trước khi làm bài tập.

Phần bài tập có khá nhiều bài tập đa dạng. Giảng viên giảng dạy môn học sẽ quy định một số bài tập cơ bản để tất cả sinh viên phải làm ở nhà. Các bài tập khác dành cho các sinh viên khá, giỏi tự rèn luyện.

Cuốn sách này là tài liệu cần thiết cho sinh viên Trường Đại học Kiến trúc Hà Nội, đồng thời cũng là tài liệu tốt cho sinh viên các trường đại học kỹ thuật khác.

Chúng tôi xin chân thành cảm ơn Ban Giám hiệu và phòng Quản lý khoa học Trường Đại học Kiến trúc Hà Nội đã tạo điều kiện thuận lợi để cuốn sách được xuất bản.

Chúng tôi cũng chân thành cảm ơn các đồng nghiệp đã đóng góp ý kiến và giúp đỡ trong việc hoàn thành cuốn sách.

Vì thời gian biên soạn cuốn sách có hạn nên chắc chắn còn thiếu sót, chúng tôi mong muốn nhận được ý kiến đóng góp của các bạn đồng nghiệp và các em sinh viên.

Mọi ý kiến xin gửi về phòng Quản lý khoa học Trường Đại học Kiến trúc Hà Nội.

Tác giả

PGS.TS. Đặng Quốc Lương

MỞ ĐẦU

Cơ học cơ sở là môn học nghiên cứu các định luật tổng quát nhất về sự cân bằng và chuyển động của vật thể. Trong cơ học cơ sở, chuyển động của vật thể được hiểu là sự thay đổi vị trí tương đối giữa vật thể và một vật lấy làm chuẩn, gọi là hệ quy chiếu. Thời gian được xem là trôi đều không phụ thuộc vào vận tốc chuyển động của vật thể. Giả thiết này phù hợp với các vật vĩ mô chuyển động với vận tốc nhỏ thua nhiều so với vận tốc ánh sáng (khoảng 300.000km/s). Không gian trong cơ học cơ sở là không gian 3 chiều thoả mãn các tiên đề và định lí hình học Ócolít.

Cơ học cơ sở được chia thành 3 phần: Tĩnh học, động học và động lực học. Tĩnh học nghiên cứu lực và điều kiện cân bằng của vật dưới tác dụng của lực. Động học nghiên cứu các tính chất hình học chuyển động của vật. Động lực học là phần tổng quát nhất của cơ học cơ sở, nghiên cứu chuyển động của vật thể dưới tác dụng của lực.

Cơ học cơ sở có lịch sử phát triển lâu đời. Ngay từ trước Công nguyên người ta đã biết những nguyên lí đơn giản của cơ học, đã biết sử dụng đòn bẩy, mặt phẳng nghiêng, ròng rọc trong khi xây dựng các công trình. Acsimet (287- 212 trước Công nguyên) là người đầu tiên đặt nền móng cho lý thuyết tĩnh học.

Đến thế kỉ XVII với sự phát triển mạnh mẽ của khoa học kĩ thuật, động lực học ra đời. Galilê (1564-1642) và Niuton (1643-1727) là hai nhà bác học có công xây dựng cơ sở lý thuyết động lực học. Những định luật cơ học cơ bản của cơ học cổ điển thường được gọi là các định luật Niuton được trình bày trong tác phẩm "*Những nguyên lí toán học của triết học tự nhiên*" xuất bản năm 1687 của Niuton. Việc áp dụng các phép tính vi phân để giải những bài toán cơ học, lần đầu tiên được nhà toán học, cơ học nổi tiếng Óle (1707-1783) đề xuất, đó là cơ sở của phần cơ học giải tích. Sau này ĐaLămBe (1717-1783) và Lagrăngiơ (1736-1813) đã phát triển cơ học giải tích lên tới đỉnh cao, đưa ra các phương pháp tổng quát giải các bài toán động lực học.

Đến thế kỉ XIX, động học được tách ra như một bộ phận độc lập của cơ học cơ sở, do yêu cầu mạnh mẽ của sự phát triển ngành chế tạo máy và ngành xây dựng. Ngày nay, động học đóng vai trò quan trọng trong việc nghiên cứu chuyển động của cơ cấu và máy.

Trước khi học môn cơ học cơ sở, sinh viên đã được học phần cơ học trong môn vật lý. Hai môn học này có những điểm giống nhau nhưng cũng có những điểm khác nhau cơ bản.

Cơ học cơ sở và cơ học trong vật lý đều nghiên cứu sự cân bằng và chuyển động của các vật thể, đều dựa trên các tiên đề Niuton. Tuy nhiên, chúng khác nhau về phương

pháp nghiên cứu và đối tượng nghiên cứu. Phương pháp nghiên cứu của cơ học trong vật lý chủ yếu là phương pháp thực nghiệm, được tiến hành theo trình tự quan sát, làm thí nghiệm từ đó rút ra các định luật vật lý và áp dụng giải thích các hiện tượng vật lý. Phương pháp nghiên cứu của cơ học cơ sở là phương pháp tiên đề. Nội dung của phương pháp tiên đề là dựa vào các khái niệm cơ bản và một số các mệnh đề đã được thực tế kiểm nghiệm là đúng (gọi là các tiên đề) để suy ra các định lý, hệ quả và cuối cùng, áp dụng chúng để tính toán các hệ kỹ thuật về phương diện cơ học. Đối tượng nghiên cứu của cơ học trong vật lý là các hệ vật lý đơn giản như hệ chất điểm, các vật rắn đơn giản. Còn đối tượng nghiên cứu của cơ học cơ sở là các hệ kỹ thuật phức tạp như các nhà cao tầng, cầu, máy móc...

Trong các trường đại học kỹ thuật, cơ học cơ sở là cơ sở trực tiếp để học tập các môn học khác của kỹ thuật như sức bền vật liệu, cơ học kết cấu, lý thuyết đàn hồi, dao động công trình...

Để hiểu được nội dung của môn học này, sinh viên cần nắm được những kiến thức toán học cơ bản như: Đại số tuyến tính, các phép tính vi phân, tích phân, hàm nhiều biến và một số hiểu biết thực tế kỹ thuật.

Chương I

CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN, HỆ TIỀN ĐỀ TĨNH HỌC

Tĩnh học là phần thứ nhất của môn cơ học cơ sở, nội dung của tĩnh học là tìm điều kiện cân bằng của vật rắn dưới tác dụng của lực. Lý thuyết tĩnh học được xây dựng bằng phương pháp tiên đề. Đầu tiên người ta đưa ra các khái niệm cơ bản và một số các mệnh đề đã được thực tế kiểm nghiệm là đúng không chứng minh gọi là hệ tiên đề tĩnh học. Dựa trên các khái niệm cơ bản và hệ tiên đề đó người ta xây dựng các định lý, hệ quả, được chứng minh chặt chẽ. Vì vậy trong Chương I chúng ta nghiên cứu các khái niệm cơ bản và hệ tiên đề tĩnh học.

1.1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VÀ CÁC ĐỊNH NGHĨA

1.1.1. Các khái niệm cơ bản

1. Lực

Lực là đại lượng đặc trưng cho tác dụng cơ học của vật thể này lên vật thể khác.

Ví dụ: Một người dùng búa đóng đinh vào tường, người đó đã tác dụng lên đinh một lực. Quả bóng đang đứng yên, ta dùng chân đá vào quả bóng làm nó bay đi, ta đã tác dụng vào quả bóng một lực...

Qua nghiên cứu người ta thấy lực được đặc trưng bởi ba yếu tố sau:

- *Điểm đặt của lực*: là điểm thuộc vật mà qua điểm đó, vật khác tác dụng lên vật.

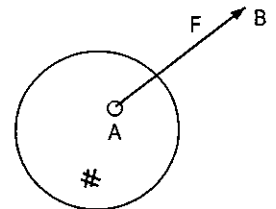
- *Phương chiều của lực*: cho biết lực được truyền vào vật theo phương nào, chiều nào.

- *Cường độ của lực*: biểu thị tác dụng mạnh hay yếu của lực.

Đơn vị đo cường độ của lực là Niuton kí hiệu là N. Trong đó 1N là lực làm cho vật có khối lượng 1kg chuyển động với gia tốc 1m/s^2 .

Do có 3 yếu tố đặc trưng trên nên lực được biểu diễn bằng một véc tơ buộc \vec{F} có điểm đặt trùng với điểm đặt lực, phương chiều là phương chiều của lực, độ dài tỉ lệ với cường độ của lực.

Đường thẳng mang véc tơ lực gọi là *đường tác dụng của lực*.



Hình 1.1

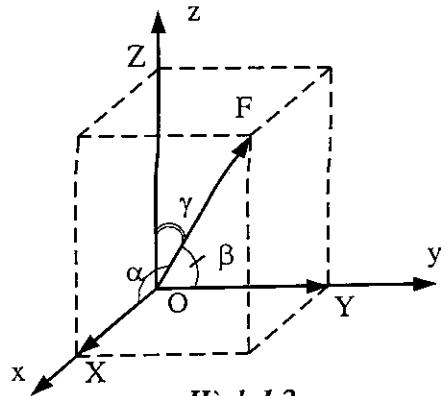
Trong không gian lực được phân tích thành 3 thành phần vuông góc với nhau:

$$\vec{F} = X \vec{i} + Y \vec{j} + Z \vec{k}$$

Trong đó:

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các véc tơ đơn vị trên 3 trục của hệ tọa độ Đề Các vuông góc.

X, Y, Z là hình chiếu của \vec{F} trên 3 trục tọa độ đó.



Hình 1.2

Cường độ của lực \vec{F} được xác định bởi công thức:

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

Phương chiều của lực \vec{F} được xác định bởi các cosin chỉ phương:

$$\cos\alpha = \frac{X}{F}; \cos\beta = \frac{Y}{F}; \cos\gamma = \frac{Z}{F}$$

2. Vật rắn tuyệt đối

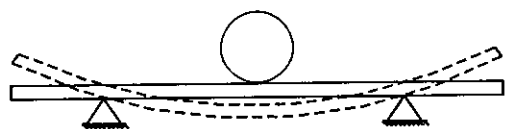
Trong cơ học cơ sở, vật thể được biểu diễn dưới hai dạng mô hình là chất điểm và hệ chất điểm (hay cơ hệ).

- Chất điểm là điểm hình học mang khối lượng.
 - Hệ chất điểm là tập hợp các chất điểm có vị trí và chuyển động phụ thuộc vào nhau...
 - Vật rắn tuyệt đối là một cơ hệ mà khoảng cách giữa hai điểm bất kì luôn không đổi.
- Như vậy vật rắn tuyệt đối có hình dạng không đổi khi chịu tác dụng của lực.

Trong thực tế không có vật tuyệt đối rắn mà dưới tác dụng của lực vật bị biến dạng.

Ví dụ đặt lên dầm một vật nặng, dầm bị võng xuống (hình 1.3). Vì độ biến dạng của vật thường là nhỏ, có thể bỏ qua nên khi xét cân bằng của vật ta coi vật là tuyệt đối rắn, và vật tuyệt đối rắn là đối tượng nghiên cứu của môn cơ học cơ sở.

Để đơn giản sau này ta gọi vật rắn tuyệt đối là vật rắn. Nếu vật có biến dạng lớn ta không dùng được mô hình vật rắn tuyệt đối mà phải coi vật là vật biến dạng, đó là đối tượng nghiên cứu của cơ học vật rắn biến dạng, ví dụ như sức bền vật liệu và cơ học kết cấu.



Hình 1.3

3. Trạng thái cân bằng

Vật rắn ở trạng thái cân bằng nếu nó đứng yên đối với một vật nào đó được chọn làm chuẩn, gọi là hệ quy chiếu. Trong tĩnh học, hệ quy chiếu được chọn là hệ quy chiếu quán tính, nó thoả mãn tiên đề quán tính của Niuton.

Người ta đã chứng minh rằng không tồn tại hệ quy chiếu quán tính. Do đó chỉ có thể chọn được hệ quy chiếu quán tính gần đúng. Trong tĩnh học người ta chọn hệ quy chiếu quán tính gần đúng là trái đất. Như vậy vật rắn nằm yên so với trái đất được coi là vật ở trạng thái cân bằng. Để tiện tính toán người ta gắn vào hệ quy chiếu một hệ trục tọa độ. Với một hệ quy chiếu có thể gắn nhiều hệ trục tọa độ khác nhau. Sau này để đỡ công kênh người ta thường coi hệ trục tọa độ đó là hệ quy chiếu.

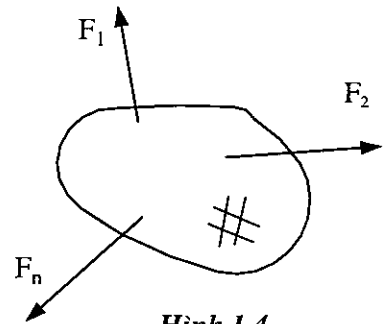
1.1.2. Một số định nghĩa khác

1. Hệ lực

a) Định nghĩa:

- Tập hợp các lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ cùng tác dụng lên một vật rắn gọi là một hệ lực kí hiệu là $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$.

- Hệ hai lực song song ngược chiều và cùng cường độ gọi là một ngẫu lực.



Hình 1.4

b) Phân loại hệ lực: Căn cứ vào sự phân bố các đường tác dụng của các lực thuộc hệ, người ta phân các hệ lực thành các loại sau:

- Hệ lực đồng quy: là hệ lực có các đường tác dụng giao nhau tại một điểm.
- Hệ ngẫu lực: là tập hợp các ngẫu lực cùng tác dụng lên một vật rắn.
- Hệ lực song song: có các đường tác dụng của các lực song song với nhau.
- Hệ lực phẳng: có các đường tác dụng cùng nằm trên một mặt phẳng.
- Hệ lực không gian: có các đường tác dụng phân bố bất kì trong không gian.

2. Hai hệ lực tương đương: Nếu hai hệ lực có tác dụng cơ học như nhau thì gọi là tương đương với nhau.

Kí hiệu là: $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim (\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2, \dots, \vec{\phi}_m)$

3. Hợp lực của một hệ lực:

Nếu hệ lực tương đương với một lực duy nhất \vec{R} thì \vec{R} được gọi là hợp lực của hệ lực và ta nói hệ lực có hợp lực, kí hiệu là: $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim \vec{R}$

4. Hệ lực cân bằng:

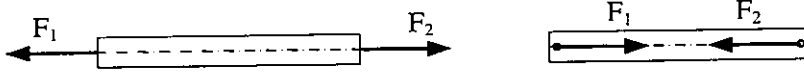
Nếu tác dụng của hệ lực lên vật mà không làm thay đổi trạng thái đứng yên hay chuyển động của vật khi không chịu tác dụng của hệ lực ấy, thì hệ lực được gọi là cân bằng hay tương đương không, kí hiệu là: $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim 0$.

1.2. HỆ TIÊN ĐỀ TÍNH HỌC

Hệ tiên đề tính học gồm 5 tiên đề.

1. Tiên đề 1 (Tiên đề về sự cân bằng)

Điều kiện cần và đủ để hệ hai lực cân bằng là chúng có cùng đường tác dụng hướng ngược chiều nhau và có cùng cường độ.



Hình 1.5

Tiên đề 1 cho ta tiêu chuẩn đầu tiên về sự cân bằng của một hệ lực. Sau này để chứng minh một hệ lực cân bằng ta cần biến đổi hệ lực đó về hệ hai lực cân bằng.

Hai lực thoả mãn tiên đề 1 gọi là trực đối nhau:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim 0 \quad \vec{F}_2 = -\vec{F}_1 \quad (1.1)$$

2. Tiên đề 2 (Tiên đề thêm bớt một cặp lực cân bằng)

Tác dụng của hệ lực không thay đổi nếu ta thêm vào hay bớt đi một cặp lực cân bằng.

Do đó, nếu $(\vec{F}, \vec{F}') \sim 0$ thì:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n, \vec{F}, \vec{F}') \sim (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \quad (1.2)$$

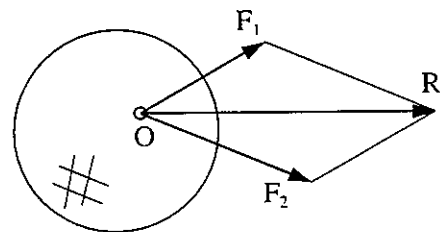
Ý nghĩa của tiên đề 2 là cho ta phép biến đổi tương đương đầu tiên của hệ lực.

3. Tiên đề 3 (Tiên đề hình bình hành lực)

Hệ hai lực cùng đặt tại một điểm tương đương với một lực đặt tại điểm chung ấy và được biểu diễn bằng đường chéo của hình bình hành mà hai cạnh là hai véc tơ biểu diễn hai lực đã cho.

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim \vec{R} \quad \text{trong đó} \quad \vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad (1.3)$$

Tiên đề cho phép ta hợp hai lực có cùng điểm đặt và phân tích một lực theo hai phương bất kỳ.



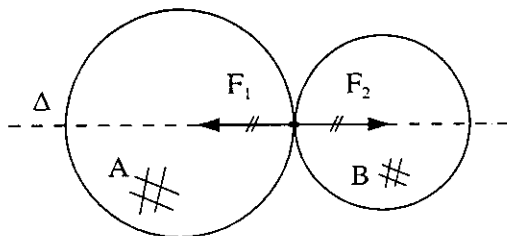
Hình 1.6

4. Tiên đề 4 (Tiên đề tác dụng và phản tác dụng)

Lực tác dụng và phản tác dụng giữa hai vật là hai lực có cùng đường tác dụng hướng ngược chiều nhau và có cùng cường độ: $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$

Chú ý là lực tác dụng và phản tác dụng không phải là hai lực cân bằng vì chúng tác dụng lên hai vật khác nhau.

- Tiên đề 4 là cơ sở để nghiên cứu sự cân bằng của hệ vật.

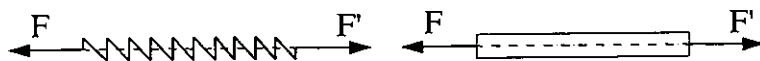


Hình 1.7

5. Tiên đề 5 (Tiên đề hoá rắn)

Vật biến dạng đã cân bằng thì khi hoá rắn lại nó vẫn cân bằng.

Như vậy một hệ lực đã làm cho vật biến dạng cân bằng thì cũng làm cho vật rắn cân bằng, nhưng một hệ lực làm cho vật rắn cân bằng chưa chắc đã làm cho vật biến dạng cân bằng. Ví dụ hai lực \vec{F} và \vec{F}' cùng phương, ngược chiều, cùng cường độ kéo giãn một lò xo từ trạng thái tự nhiên. Khi lò xo không giãn nữa, vật biến dạng cân bằng, mang cặp lực cân bằng này đặt vào một vật rắn thì vật rắn cũng cân bằng. Trái lại mang cặp lực cân bằng đã làm cho vật rắn cân bằng, đặt vào lò xo ở trạng thái tự nhiên thì ngay từ đầu lò xo chưa cân bằng ngay, nó còn bị giãn dài ra đến một mức nào đó mới cân bằng.



Hình 1.8

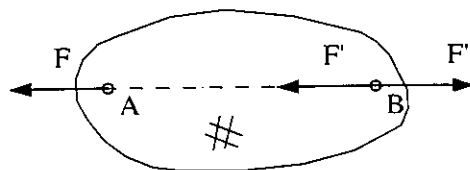
Tiên đề 5 là cơ sở nghiên cứu sự cân bằng của các vật biến dạng.

6. Hệ quả

Từ các tiên đề tĩnh học có thể suy ra các hệ quả quan trọng sau đây:

a) Hệ quả trượt lực

Tác dụng của lực không thay đổi khi trượt lực dọc theo đường tác dụng của nó.



Hình 1.9

Chứng minh: Giả sử cho lực \vec{F} đặt tại A ta chứng minh có thể trượt \vec{F} tới đặt tại điểm B bất kỳ nằm trên đường tác dụng của \vec{F} .

Thật vậy, đặt tại B hai lực cân bằng $(\vec{F}', \vec{F}'') \sim 0$ sao cho $\vec{F} = \vec{F}' = -\vec{F}''$.

Theo tiên đề 2: $\vec{F} \sim (\vec{F}, \vec{F}'', \vec{F}') \sim \vec{F}'$ vì $(\vec{F}, \vec{F}'') \sim 0$.

Lực \vec{F}' chính là lực \vec{F} đặt tại B.

b) Hợp lực của hệ lực đồng quy

Hệ lực đồng quy tương đương với một hợp lực đặt tại điểm đồng quy của hệ, có véc tơ bằng tổng hình học các véc tơ biểu diễn các lực thuộc hệ:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim \vec{R}; \vec{R} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \quad (1.4)$$

Chứng minh: Cho hệ lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ đồng quy tại O.

Theo tiên đề 3, hợp 2 lực (\vec{F}_1, \vec{F}_2) ta được.

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim \vec{R}_1 \text{ với } \vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

Tiếp theo hợp \vec{R}_1 và \vec{F}_3 được:

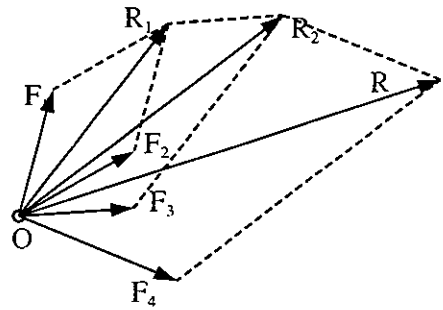
$$(\vec{R}_1, \vec{F}_3) \sim \vec{R}_2; \vec{R}_2 = \vec{R}_1 + \vec{F}_3$$

Thay \vec{R}_1 bằng hệ lực (\vec{F}_1, \vec{F}_2) ta có:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3) \sim \vec{R}_2; \vec{R}_2 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

Tiếp tục hợp lực cho đến lực cuối cùng \vec{F}_n ta có:

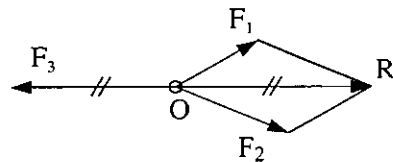
$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim \vec{R}; \vec{R} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \text{ đặt tại O theo tiên đề 3.}$$



Hình 1.10

c) Định lý ba lực cân bằng

Định lý: Hệ ba lực cân bằng cùng nằm trong một mặt phẳng nếu không cùng song song thì phải đồng quy tại một điểm.



Hình 1.11

Chứng minh: Giả sử hệ 3 lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3)$ cân bằng cùng nằm trong một mặt phẳng và không cùng song song

song với nhau. Như vậy có ít nhất hai lực giao nhau tại một điểm. Giả sử \vec{F}_1, \vec{F}_2 giao nhau tại O. Theo tiên đề 3 hai lực này có hợp lực \vec{R} đặt tại O.

Do đó: $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3) \sim (\vec{R}, \vec{F}_3) \sim 0$. Theo tiên đề 1, hệ hai lực (\vec{R}, \vec{F}_3) đã cân bằng nên trực đối nhau. \vec{R} đã qua O vậy \vec{F}_3 cũng phải qua O.

Như vậy hệ lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3)$ đồng quy tại O.

1.3. NGUYÊN LÝ GIẢI PHÓNG LIÊN KẾT

1. Vật tự do và vật chịu liên kết

Vật tự do là vật có thể thực hiện mọi dịch chuyển vô cùng bé từ vị trí đang xét sang vị trí lân cận. Nếu dịch chuyển của vật theo một phương nào đó bị ngăn cản thì vật được gọi là vật chịu liên kết (hay không tự do). Quả bóng bay bơm đầy khí hydrô bay lơ lửng giữa trời là vật tự do, còn vật nằm trên mặt bàn là vật chịu liên kết.

2. Liên kết và phản lực liên kết

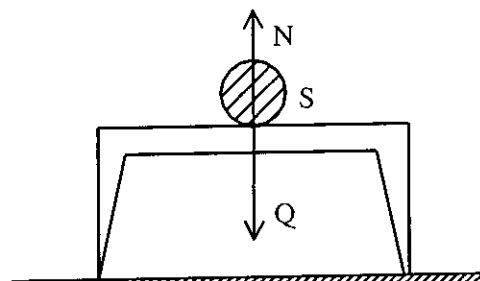
Điều kiện cản trở dịch chuyển của vật được gọi là liên kết đặt lên vật ấy.

Trong tĩnh học ta chỉ khảo sát các liên kết hình học là các liên kết được thực hiện bằng sự tiếp xúc hình học giữa hai vật.

Trong cơ học ta phải thường xuyên khảo sát sự cân bằng hay chuyển động của các vật. Sau này để đơn giản ta gọi chúng là vật khảo sát.

Vật khảo sát S đặt trên bàn, bị mặt bàn ngăn trở dịch chuyển còn được gọi là vật chịu liên kết, mặt bàn gọi là vật gây liên kết, lực do vật khảo sát S tác dụng lên vật gây liên kết gọi là áp lực \bar{Q} , còn lực do vật gây liên kết tác dụng lên vật khảo sát S gọi là phản lực liên kết \bar{N} .

Những lực không phải là phản lực liên kết gọi là các lực hoạt động, ví dụ trọng lực của vật là lực hoạt động.



Hình 1.12

3. Phương, chiều phản lực liên kết của một số liên kết thường gặp

Qua nghiên cứu thực nghiệm người ta thấy phản lực liên kết có các tính chất sau:

- Phản lực liên kết đặt vào vật khảo sát, nó là lực thụ động, độ lớn của phản lực liên kết phụ thuộc vào các lực hoạt động tác dụng lên vật.

- Phản lực liên kết hướng ngược với hướng theo đó dịch chuyển của vật bị ngăn cản.

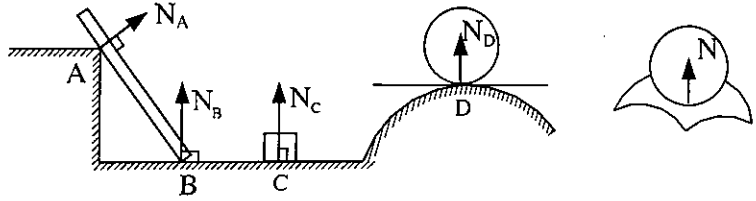
Xác định loại liên kết và phương chiều các phản lực liên kết tương ứng là nhiệm vụ quan trọng đầu tiên khi giải bài toán tĩnh học. Nếu xác định sai loại liên kết và phương chiều các phản lực liên kết thì bài toán sai ngay từ đầu.

Căn cứ vào tính chất của phản lực liên kết ta xác định được phương chiều phản lực liên kết của một số liên kết thường gặp:

a) *Liên kết tựa*: Vật khảo sát tựa lên vật gây liên kết. Nếu bỏ qua ma sát giữa hai vật thì theo tính chất 2, phản lực liên kết hướng theo pháp tuyến mặt tiếp xúc giữa hai vật và ngược với hướng dịch chuyển bị ngăn cản ký hiệu là \bar{N} .

Hình 1.13

a) Liên kết tựa

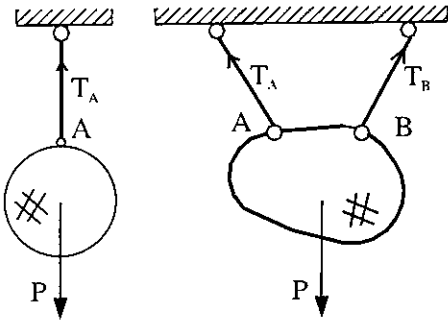


b) Liên kết gối tựa con lăn
(Gối tựa di động)

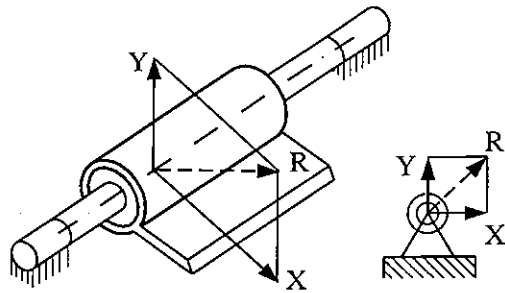


b) Liên kết dây mềm:

Giả sử dây không giãn, dịch chuyển của vật dọc theo dây bị ngăn cản nên phản lực liên kết dây đặt vào điểm buộc dây và hướng dọc theo dây, từ vật khảo sát hướng ra, phản lực liên kết dây gọi là sức căng dây, ký hiệu là \vec{T} .



Hình 1.14

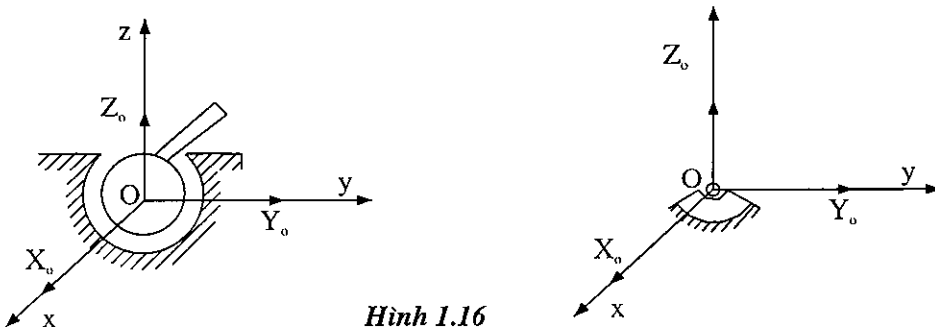


Hình 1.15

c) Liên kết bản lề trụ, khớp cố định:

Liên kết cho phép vật quay quanh trục bản lề và ngăn cản dịch chuyển theo hướng vuông góc với trục bản lề. Do đó phản lực liên kết hướng vuông góc với trục bản lề, thường được phân tích thành hai thành phần \vec{X} , \vec{Y} vuông góc với nhau.

d) Liên kết bản lề cầu:



Hình 1.16

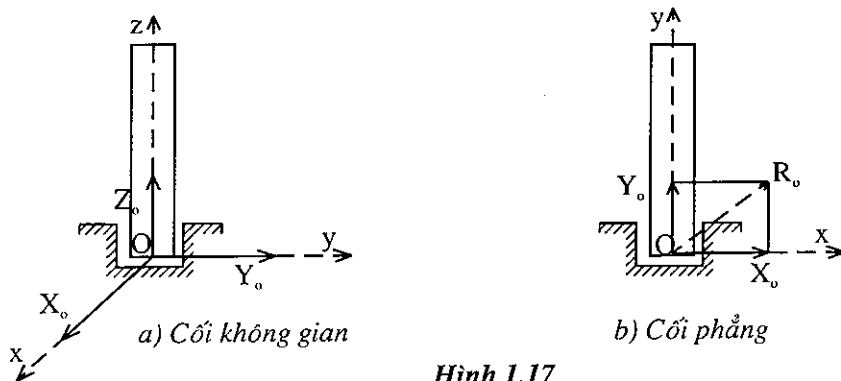
Liên kết cho phép vật xoay quanh tâm cầu theo mọi phương nhưng ngăn cản mọi dịch chuyển thẳng vì vậy phản lực liên kết đặt tại tâm cầu, hướng theo một phương nào đó, thường được phân tích thành ba thành phần $\bar{X}_0, \bar{Y}_0, \bar{Z}_0$ theo ba trục vuông góc.

e) Liên kết cố:

Liên kết cho phép vật quay quanh trục z, phản lực liên kết được phân thành 3 thành phần $\bar{X}_0, \bar{Y}_0, \bar{Z}_0$ vuông góc với nhau.

Khác với bản lề cầu, trong liên kết cố $Z_0 > 0$.

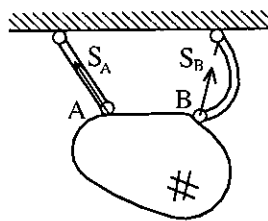
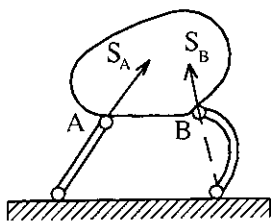
Nếu hệ lực tác dụng lên vật là hệ lực phẳng thì liên kết được gọi là cố phẳng, khi đó phản lực liên kết cố được phân tích thành 2 thành phần \bar{X}_0, \bar{Y}_0 nằm trong mặt phẳng tác dụng của hệ lực. Nếu là hệ lực không gian thì gọi là cố không gian.



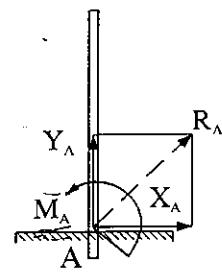
Hình 1.17

f) Liên kết thanh:

Thanh được giả thiết là không trọng lượng và không có lực nào tác dụng lên giữa thanh. Như vậy thanh chỉ chịu tác dụng của 2 lực tại 2 đầu thanh, do đó phản lực liên kết thanh hướng dọc theo đường nối hai đầu thanh. Nếu thanh thẳng, phản lực liên kết thanh được gọi là ứng lực của thanh hay lực dọc của thanh ký hiệu là \bar{S} .



Hình 1.18



Hình 1.19

h) Liên kết ngàm phẳng:

Liên kết ngăn cản dịch chuyển thẳng theo phương bất kỳ đồng thời ngăn cản chuyển động xoay quanh A của vật khảo sát.

Vì vậy phản lực liên kết gồm lực \vec{R}_A và một ngẫu lực M_A nằm trong mặt phẳng tác dụng của hệ lực lên vật khảo sát.

Lực \vec{R}_A được phân tích thành hai thành phần vuông góc với nhau \vec{X}_A, \vec{Y}_A .

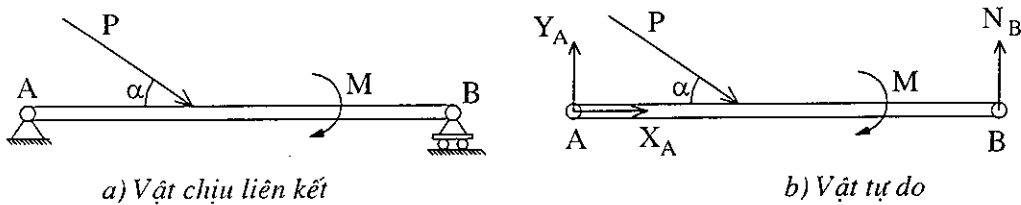
4. Nguyên lý giải phóng liên kết

Vật chịu liên kết cân bằng có thể coi là vật tự do cân bằng, nếu ta giải phóng các liên kết, thay thế tác dụng của các liên kết đã được giải phóng bằng các phản lực liên kết tương ứng.

Nguyên lý cho phép ta đưa bài toán khảo sát cân bằng của vật chịu liên kết về bài toán cân bằng của vật tự do bằng cách thay thế tác dụng của các liên kết lên vật khảo sát bằng các phản lực liên kết tương ứng.

Ví dụ: Dầm AB cân bằng có liên kết tại A và B có thể coi là dầm tự do cân bằng nếu ta thay liên kết ở A, B bằng các phản lực liên kết tương ứng $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{N}_B$.

Chú ý: Nguyên lý giải phóng liên kết không những đúng cho vật chịu liên kết cân bằng mà còn đúng cho cả vật chịu liên kết đang chuyển động mà chúng ta sẽ nghiên cứu trong phần động lực học.



Hình 1.20

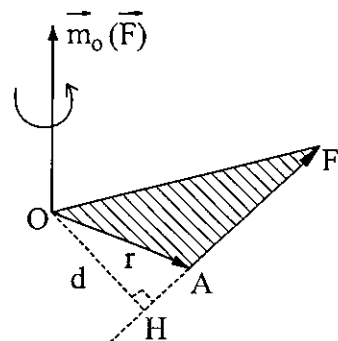
1.4. MÔ MEN CỦA LỰC VÀ NGẪU LỰC

1. Mô men của một lực đối với một điểm

Để đặc trưng cho tác dụng làm quay vật xung quanh một điểm của lực người ta đưa ra khái niệm mô men của một lực đối với một điểm.

a) Định nghĩa:

Mô men của lực \vec{F} đối với điểm O kí hiệu $m_0(\vec{F})$ là véc tơ vuông góc với mặt phẳng chứa lực \vec{F} và điểm O, có chiều sao cho nhìn từ đầu mút xuống gốc thấy \vec{F} quay quanh O ngược chiều kim đồng hồ, có độ lớn bằng Fd , trong đó d là khoảng cách từ O đến đường tác dụng của lực \vec{F} , gọi là cánh tay đòn của lực \vec{F} đối với điểm O.



Hình 1.21

b) Nhận xét:

- Véc tơ mô men $\vec{m}_0(\vec{F})$ có thể biểu diễn dưới dạng:

$$\vec{m}_0(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (1.5)$$

Trong đó \vec{r} là véc tơ định vị của điểm đặt lực \vec{F} .

Nếu gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các véc tơ đơn vị trên các trục của hệ tọa độ Đề Các vuông góc. Hình chiếu của \vec{r}, \vec{F} lên 3 trục lần lượt là x, y, z và X, Y, Z .

Thì từ (1.5) ta có:

$$\vec{m}_0(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = (yZ - zY)\vec{i} + (zX - xZ)\vec{j} + (xY - yX)\vec{k} \quad (1.5)'$$

Biểu thức (1.5)' giúp ta tính được mô men của lực đối với một điểm trên các phần mềm máy tính.

- Độ lớn của véc tơ mô men: $|\vec{m}_0(\vec{F})| = 2dt\Delta OAF$

- Theo định nghĩa $\vec{m}_0(\vec{F}) = 0$ khi $\vec{F} = 0$ hoặc O thuộc đường tác dụng của \vec{F} .

- Trong trường hợp các lực cùng nằm trong mặt phẳng chứa điểm lấy mô men thì các véc tơ mô men của các lực lấy đối với điểm đó sẽ cùng phương, khi đó để đơn giản ta đưa ra khái niệm mô men đại số của lực lấy đối với 1 điểm: $\bar{m}_0(\vec{F}) = \pm Fd$ lấy dấu dương nếu \vec{F} quay quanh O ngược chiều kim đồng hồ, lấy dấu âm trong trường hợp ngược lại.

Ý nghĩa cơ học của mô men của lực đối với một điểm là biểu thị tác dụng làm quay vật quanh điểm lấy mô men của lực

2. Mô men của lực đối với một trục

Để biểu thị tác dụng làm quay vật xung quanh một trục nào đấy của lực, người ta đưa ra định nghĩa mô men của lực đối với một trục.

a) Định nghĩa: Mô men của lực \vec{F} đối với trục Δ kí hiệu là $\bar{m}_\Delta(\vec{F})$ là lượng đại số:

$$\bar{m}_\Delta(\vec{F}) = \pm F'h. \quad (1.6)$$

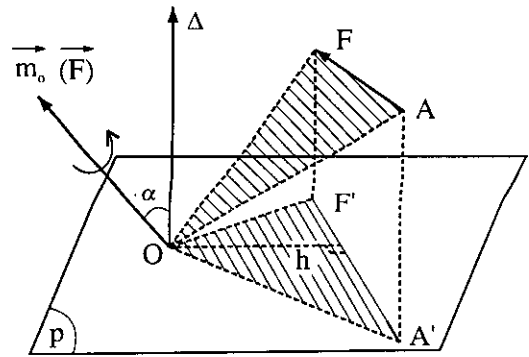
Trong đó:



- \vec{F}' là hình chiếu của \vec{F} xuống mặt phẳng π vuông góc với trục Δ , O là giao điểm của Δ và mặt phẳng π .

- h là khoảng cách từ O đến đường tác dụng của \vec{F}' .

- Lấy dấu dương nếu \vec{F} quay quanh O ngược chiều kim đồng hồ và dấu âm trong trường hợp ngược lại.



Hình 1.22

b) Nhận xét: Từ định nghĩa ta nhận thấy:

$$-\bar{m}_{\Delta}(\vec{F}) = \bar{m}_O(\vec{F}')$$

$$-|\bar{m}_{\Delta}(\vec{F})| = 2dt \Delta OA'F'$$

- $\bar{m}_{\Delta}(\vec{F}) = 0$ khi $F' = 0$ hoặc $h = 0$ có nghĩa là khi $\vec{F} \parallel \Delta$ hoặc đường tác dụng của \vec{F} cắt Δ .

Mô men của lực đối với một trục biểu thị tác dụng làm quay vật quanh trục đó của lực.

3. Liên hệ giữa mô men của lực lấy đối với một điểm và mô men của lực đối với một trục

a) Định lý: Mô men của lực đối với một trục bằng hình chiếu trên trục đó của véc tơ mô men lực đối với một điểm nằm trên trục.

b) Chứng minh: Gọi α là góc lập giữa hai mặt OAF và OA'F', theo định lý hình chiếu diện tích ta có:

$$dt \Delta OA'F' = dt \Delta OAF \cdot \cos \alpha \quad (*)$$

Theo các nhận xét về mô men của lực \vec{F} đối với điểm O và trục Δ :

$$\bar{m}_{\Delta}(\vec{F}) = 2dt \Delta OA'F'$$

$$|\bar{m}_O(\vec{F})| = 2dt \Delta OAF$$

Nên thay vào (*) được:

$$\bar{m}_{\Delta}(\vec{F}) = |\bar{m}_O(\vec{F})| \cos \alpha$$

Vì góc giữa $\bar{m}_O(\vec{F})$ và trục Δ cũng là α nên ta có :

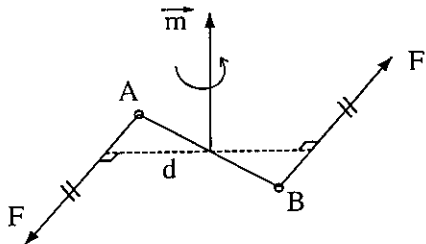
$$\bar{m}_{\Delta}(\vec{F}) = hc_{\Delta} [\bar{m}_O(\vec{F})] \quad (1.7)$$

Đó là điều cần phải chứng minh.

4. Ngẫu lực

a) **Định nghĩa:** Ngẫu lực là hệ hai lực song song ngược chiều và cùng cường độ, kí hiệu là (\vec{F}, \vec{F}') .

- Khoảng cách d giữa hai lực gọi là cánh tay đòn của ngẫu lực.
- Mặt phẳng chứa hai lực gọi là mặt phẳng tác dụng của ngẫu lực.
- Chiều quay của ngẫu lực là chiều thuận theo chiều mũi tên của hai lực.
- Trị số mô men của ngẫu lực: $m = Fd$, trong đó F là cường độ của lực.



Hình 1.23

b) Sự tương đương của các ngẫu lực và các đặc trưng của ngẫu lực

Dựa vào các tiên đề tĩnh học có thể chứng minh được định lý sau:

Định lý: Hai ngẫu lực trong cùng một mặt phẳng tương đương với nhau khi và chỉ khi chúng có cùng chiều quay và trị số mô men.

Như vậy ngẫu lực có thể di chuyển tùy ý trong mặt phẳng tác dụng của nó, có thể thay đổi cường độ của lực, cánh tay đòn của ngẫu lực nhưng nếu giữ nguyên chiều quay và trị số mô men thì tác dụng của ngẫu lực là không thay đổi.

Kết hợp 2 yếu tố đặc trưng đó của ngẫu lực trong mặt phẳng người ta đưa ra khái niệm **mô men đại số của ngẫu lực**.

Định nghĩa: Mô men đại số của ngẫu lực là lượng đại số $\bar{m} = \pm Fd$ mang dấu dương nếu ngẫu quay ngược chiều kim đồng hồ và mang dấu âm trong trường hợp ngược lại.

Theo định lý và định nghĩa trên ta có:

Định lý: Hai ngẫu lực trong cùng một mặt phẳng tương đương với nhau khi và chỉ khi chúng có cùng mô men đại số.

Mô men đại số của ngẫu lực là đại lượng đặc trưng cho tác dụng của ngẫu lực trong mặt phẳng.

Tác dụng của ngẫu lực là làm quay vật quanh trục vuông góc với mặt phẳng chứa ngẫu lực, nên tác dụng của nó không đổi nếu ta dời song song mặt phẳng tác dụng của ngẫu lực.

Như vậy trong không gian ngẫu lực còn có thêm một yếu tố đặc trưng nữa là phương Δ vuông góc với mặt phẳng tác dụng của ngẫu lực.

Để đặc trưng cho tác dụng của ngẫu lực trong không gian người ta đưa ra khái niệm véc tơ mô men của ngẫu lực.

Định nghĩa: Véc tơ mô men của ngẫu lực là véc tơ tự do có phương vuông góc với mặt phẳng tác dụng của nó, có chiều sao cho nhìn từ mũi xuống gốc thấy ngẫu lực quay ngược chiều kim đồng hồ, có độ lớn bằng trị số mô men của ngẫu lực.

Véc tơ mô men của ngẫu lực có thể biểu diễn dưới dạng:

$$\vec{m} = A\vec{B} \times \vec{F}' = \vec{m}_A(\vec{F}')$$

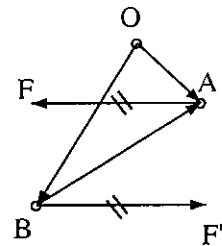
$$\text{Hay:} \quad \vec{m} = B\vec{A} \times \vec{F} = \vec{m}_B(\vec{F}) \quad (1.8)$$

Theo định nghĩa trên véc tơ mô men của ngẫu lực bao hàm cả ba yếu tố đặc trưng của ngẫu lực trong không gian là chiều quay, trị số mô men, phương Δ vuông góc với mặt phẳng tác dụng của ngẫu lực, nên ta có:

Định lý: Hai ngẫu lực trong không gian tương đương với nhau khi và chỉ khi chúng có cùng véc tơ mô men. Véc tơ mô men là đại lượng đặc trưng cho tác dụng của ngẫu lực trong không gian.

Nhận xét: Véc tơ mô men của ngẫu lực bằng tổng hình học véc tơ mô men của hai lực tạo thành ngẫu lực đối với một điểm bất kỳ.

Thật vậy, cho ngẫu (\vec{F}, \vec{F}') có véc tơ mô men \vec{m} và điểm O bất kỳ.



Hình 1.24

Theo định nghĩa ta có:

$$\vec{m}_O(\vec{F}) + \vec{m}_O(\vec{F}') = \vec{OA} \times \vec{F} + \vec{OB} \times \vec{F}' = \vec{OA} \times \vec{F} - \vec{OB} \times \vec{F} = (\vec{OA} - \vec{OB}) \times \vec{F} = \vec{BA} \times \vec{F} = \vec{m}$$

c) Hợp các ngẫu lực

Cho một hệ gồm n ngẫu lực cùng tác dụng lên một vật rắn, bằng cách ghép lần lượt hai ngẫu lực với nhau cuối cùng ta được một ngẫu lực. Do đó ta có:

Định lý: Hợp các ngẫu lực ta được một ngẫu lực tổng hợp có véc tơ mô men bằng tổng hình học các véc tơ mô men của các ngẫu lực thành phần.

$$\vec{M} = \sum_{k=1}^n \vec{m}_k \quad (1.9)$$

Nếu các ngẫu lực cùng nằm trên một mặt phẳng thì hợp các ngẫu lực ta được một ngẫu lực tổng hợp nằm ngay trong mặt phẳng đó và có mô men đại số bằng tổng các mô men đại số của các ngẫu lực thành phần.

$$\vec{M} = \sum_{k=1}^n \vec{m}_k \quad (1.9)'$$

Chương II

THU GỌN HỆ LỰC, ĐIỀU KIỆN CÂN BẰNG CỦA HỆ LỰC

Nhiệm vụ của tĩnh học là tìm điều kiện cân bằng của vật rắn dưới tác dụng của lực. Vật rắn cân bằng nếu hệ lực tác dụng lên vật là hệ lực cân bằng. Vì vậy bài toán tìm điều kiện cân bằng của vật được đưa về bài toán tìm điều kiện cân bằng của hệ lực tác dụng lên vật.

Do đó trong Chương II này ta sẽ giải quyết hai bài toán cơ bản của tĩnh học là thu gọn hệ lực và tìm điều kiện cân bằng của hệ lực.

2.1. HAI ĐẶC TRƯNG CƠ BẢN CỦA HỆ LỰC

1. Vectơ chính của hệ lực

a) Định nghĩa: Vectơ chính của hệ lực là vectơ tổng hình học các vectơ biểu diễn các lực:

$$\vec{R}' = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \quad (2.1)$$

b) Phương pháp xác định: Để xác định vectơ chính của hệ lực ta dùng hai phương pháp sau đây:

- Phương pháp hình học:

Để xác định vectơ chính của hệ lực ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$) bằng phương pháp hình học ta lấy một điểm I bất kỳ rồi đặt liên tiếp các vectơ $\vec{IA} = \vec{F}_1; \vec{AB} = \vec{F}_2, \dots, \vec{KN} = \vec{F}_n$.

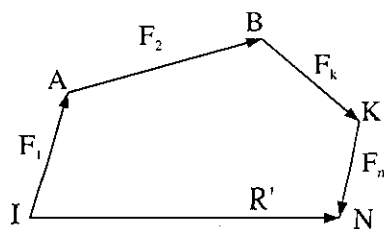
Vectơ \vec{IN} có gốc là gốc của vectơ đầu tiên và ngọn là ngọn của vectơ cuối cùng, chính là vectơ chính của hệ.

Thật vậy:

$$\vec{IN} = \vec{IA} + \vec{AB} + \dots + \vec{KN} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \vec{R}'$$

Đa giác IAB... N gọi là đa giác lực của hệ.

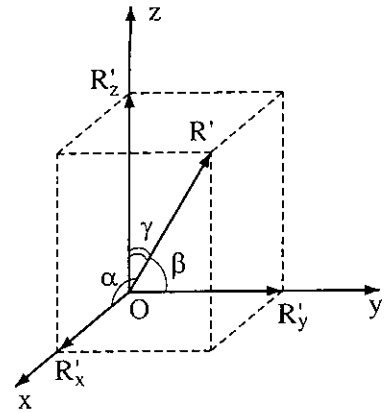
Nếu đa giác lực của hệ tự khép kín ($I \equiv N$) thì vectơ chính của hệ $\vec{R}' = 0$.



Hình 2.1

- Phương pháp chiếu: Gọi hình chiếu của \vec{R}' và \vec{F}_k lên các trục của hệ tọa độ Đề Các vuông góc lần lượt là: R'_x, R'_y, R'_z và X_k, Y_k, Z_k . Chiếu (2.1) lên 3 trục ta được hình chiếu của véc tơ chính lên 3 trục:

$$\begin{aligned} R'_x &= X_1 + X_2 + \dots + X_n = \sum_{k=1}^n X_k \\ R'_y &= Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = \sum_{k=1}^n Y_k \\ R'_z &= Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n = \sum_{k=1}^n Z_k \end{aligned} \quad (2.1')$$



Độ lớn của véc tơ chính:

$$R' = \sqrt{R'^2_x + R'^2_y + R'^2_z} \quad (2.2)$$

Côsin chỉ phương của véc tơ chính:

$$\cos\alpha = \frac{R'_x}{R'}; \cos\beta = \frac{R'_y}{R'}; \cos\gamma = \frac{R'_z}{R'} \quad (2.3)$$

2. Mô men chính của hệ lực đối với một điểm

a) Định nghĩa: Mô men chính của hệ lực lấy đối với điểm O là tổng hình học các véc tơ mô men của các lực của hệ đối với điểm O:

$$\vec{M}_0 = \vec{m}_0(\vec{F}_1) + \vec{m}_0(\vec{F}_2) + \dots + \vec{m}_0(\vec{F}_n) = \sum_{k=1}^n \vec{m}_0(\vec{F}_k) \quad (2.4)$$

Đối với hệ lực phẳng mô men chính của hệ đối với 1 điểm là lượng đại số:

$$\overline{M}_0 = \overline{m}_0(\vec{F}_1) + \overline{m}_0(\vec{F}_2) + \dots + \overline{m}_0(\vec{F}_n) = \sum_{k=1}^n \overline{m}_0(\vec{F}_k) \quad (2.5)$$

b) Phương pháp xác định:

- Phương pháp hình học:

Mô men chính của hệ lực có thể được xác định bằng phương pháp hình học tương tự như cách xác định véc tơ chính.

- Phương pháp chiếu: Gọi hình chiếu mô men chính \vec{M}_0 lên 3 trục của hệ tọa độ Đề Các vuông góc là M_{0x}, M_{0y}, M_{0z} . Chiếu hệ thức (2.4) lên 3 trục tọa độ, áp dụng định lý liên hệ giữa mô men của lực đối với một điểm và mô men của lực đối với một trục ta có:

$$M_{0x} = \sum_{k=1}^n hc_x [\vec{m}_0(\vec{F}_k)] = \sum_{k=1}^n \overline{m}_x(\vec{F}_k)$$

$$M_{oy} = \sum_{k=1}^n hc_y [m_0(\vec{F}_k)] = \sum_{k=1}^n \overline{m_y}(\vec{F}_k) \quad (2.6)$$

$$M_{oz} = \sum_{k=1}^n hc_z [m_0(\vec{F}_k)] = \sum_{k=1}^n \overline{m_z}(\vec{F}_k)$$

Độ lớn của mô men chính:

$$M_0 = \sqrt{M_{ox}^2 + M_{oy}^2 + M_{oz}^2}$$

Côsin chỉ phương của mô men chính:

$$\cos\alpha = \frac{M_{ox}}{M_0}; \quad \cos\beta = \frac{M_{oy}}{M_0}; \quad \cos\gamma = \frac{M_{oz}}{M_0}$$

Trong đó: α, β, γ là góc lập giữa \vec{M}_0 và 3 trục tọa độ.

c) Định lý biến thiên mô men chính:

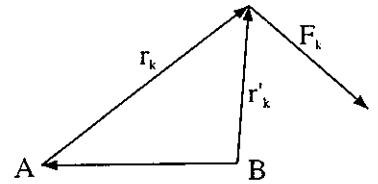
Định lý: Mô men chính của hệ lực biến thiên theo tâm lấy mô men theo quy luật sau:

$$\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{m}_B(\vec{R}'_A) \quad (2.7)$$

Chứng minh:

Gọi véc tơ định vị điểm đặt của lực \vec{F}_k đối với A, B lần lượt là \vec{r}_k, \vec{r}'_k .

$$\begin{aligned} \text{Xét hiệu: } \vec{M}_B - \vec{M}_A &= \sum_{k=1}^n \vec{r}'_k \times \vec{F}_k - \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \vec{F}_k \\ &= \sum_{k=1}^n (\vec{r}'_k - \vec{r}_k) \times \vec{F}_k = \vec{BA} \times \sum_{k=1}^n \vec{F}_k = \\ &= \vec{BA} \times \vec{R}'_A = \vec{m}_B(\vec{R}'_A). \end{aligned}$$



Hình 2.3

Từ đó suy ra (2.7).

2.2. THU HỆ LỰC KHÔNG GIAN

1. Định lý dời lực song song

Định lý: Khi dời lực đến một điểm khác để tác dụng của lực không thay đổi ta phải thêm vào một ngẫu lực phụ. Véc tơ mô men của ngẫu lực phụ bằng véc tơ mô men của lực đã cho đối với điểm dời đến.

$$\vec{F}_A \sim (\vec{F}_B, \text{ngẫu m}); \quad \vec{m} = \vec{m}_B(\vec{F}_A) \quad (2.8)$$

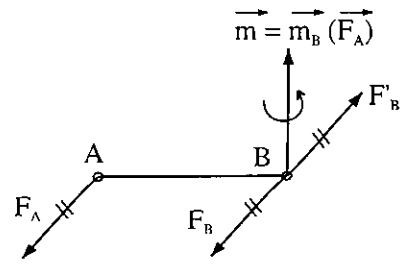
Chứng minh:

Cho lực \vec{F}_A đặt tại A. Đặt tại B hai lực cân bằng: $\vec{F}_B = -\vec{F}'_B = \vec{F}_A$

Theo tiên đề 2:

$$\vec{F}_A \sim (\vec{F}_A, \vec{F}'_B, \vec{F}_B) \sim (\vec{F}_B, \text{ngẫu } \vec{m})$$

Trong đó $\vec{m} = \vec{BA} \times \vec{F}_A = \vec{m}_B(\vec{F}_A)$. Lực \vec{F}_B chính là lực \vec{F}_A dời song song tới điểm B. Chú ý $\vec{m} \perp \vec{F}_B$ ta có:



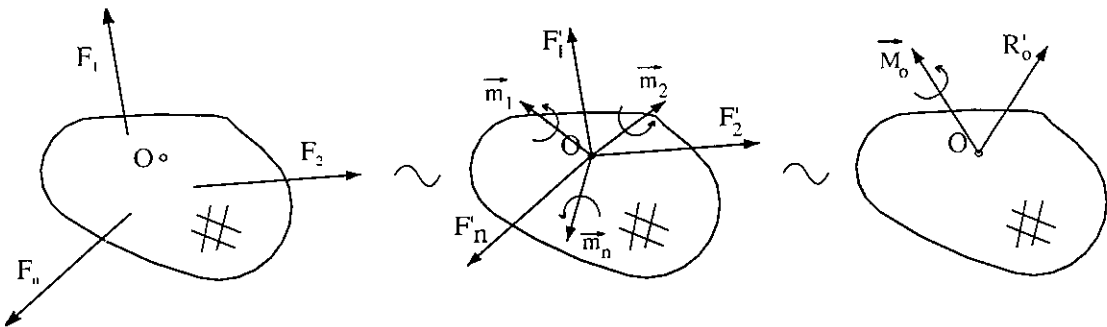
Hình 2.4

Định lý đảo: Hệ gồm một lực và một ngẫu lực, mà véc tơ mô men của ngẫu lực vuông góc với véc tơ lực thì tương đương với một lực đặt tại một điểm khác.

2. Định lý thu hệ lực không gian

Định lý: Thu hệ lực không gian về một tâm ta được một lực và một ngẫu lực. Lực đặt tại tâm thu gọn có véc tơ bằng véc tơ chính của hệ, ngẫu lực có véc tơ mô men bằng véc tơ mô men chính của hệ lực đối với tâm thu gọn.

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim (\vec{R}'_0, \text{ng } \vec{M}_0) \text{ với } \vec{R}'_0 = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \text{ và } \vec{M}_0 = \sum_{k=1}^n \vec{m}_0(\vec{F}_k) \quad (2.9)$$



Hình 2.5

Chứng minh:

Cho hệ lực không gian $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ và tâm O. Thu lần lượt các lực về tâm O.

Theo định lý dời lực song song, ở O ta được một hệ lực đồng quy, và một hệ ngẫu lực. Hợp các lực đồng quy ta được một lực đặt tại O.

$$\text{Có véc tơ: } \vec{R}'_0 = \vec{F}'_1 + \vec{F}'_2 + \dots + \vec{F}'_n = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k$$

Hợp các ngẫu lực ta được một ngẫu lực có véc tơ mô men:

$$\vec{M}_0 = \vec{m}_1 + \vec{m}_2 + \dots + \vec{m}_n = \vec{m}_0(\vec{F}_1) + \vec{m}_0(\vec{F}_2) + \dots + \vec{m}_0(\vec{F}_n) = \sum_{k=1}^n \vec{m}_0(\vec{F}_k)$$

Vậy: $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim (\vec{R}'_0, \text{ng } M_0)$ trong đó $\vec{R}'_0 = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k$; $\vec{M}_0 = \sum_{k=1}^n \vec{m}_0(\vec{F}_k)$

3. Các bất biến của hệ lực không gian

Theo định lý trên thu hệ lực không gian về một tâm ta được một lực và một ngẫu lực.

- Lực được biểu diễn bằng véc tơ chính của hệ $\vec{R}' = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k$; nó không phụ thuộc vào tâm thu gọn, nên véc tơ chính là đại lượng bất biến (không thay đổi) của hệ lực không gian.

- Theo định lý biến thiên mô men chính:

$$\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{m}_B(\vec{R}'_A) \quad (*)$$

Vì $\vec{m}_B(\vec{R}'_A) \perp \vec{R}'_A$ nên khi chiếu hệ thức trên lên phương véc tơ chính ta có:

$$\text{hc}_{\vec{R}'}[\vec{M}_B] = \text{hc}_{\vec{R}'}[\vec{M}_A]$$

Vậy hình chiếu véc tơ mô men chính lên phương véc tơ chính là đại lượng bất biến thứ hai của hệ lực không gian.

- Nếu véc tơ chính $\vec{R}' = 0$ thì $\vec{m}_B(\vec{R}'_A) = 0$, do đó theo định lý biến thiên mô men chính (*) ta có $\vec{M}_B = \vec{M}_A$ Khi đó mô men chính là bất biến của hệ lực không gian.

4. Các dạng chuẩn của hệ lực không gian

Theo định lý thu gọn trên, khi thu hệ lực không gian về một tâm ta được một lực và một ngẫu lực, tùy theo véc tơ biểu diễn lực và véc tơ mô men của ngẫu lực bằng không hay khác không, hệ lực không gian sẽ thu về 4 dạng chuẩn (tối giản) sau:

- Hệ cân bằng nếu: $\vec{R}' = 0$; $\vec{M}_0 = 0$

- Hệ thu về một ngẫu nếu: $\vec{R}' = 0$; $\vec{M}_0 \neq 0$

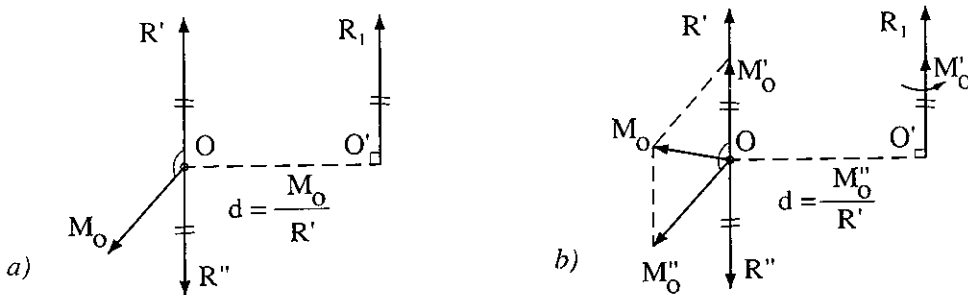
- Hệ thu về một lực nếu: $\vec{R}' \neq 0$; $\vec{M}_0 = 0$

Nếu $\vec{R}' \neq 0$; $\vec{M}_0 \neq 0$ và $\vec{R}' \perp \vec{M}_0$, áp dụng định lý đảo của định lý dời lực song song hệ (\vec{R}', \vec{M}_0) sẽ tương đương với một lực song song cùng chiều với \vec{R}' , nhưng đặt tại một điểm O' khác. Như vậy trong trường hợp này hệ cũng thu về một lực (hình 2.6a).

- Hệ thu về hệ xoắn nếu $\vec{R}' \neq 0$, $\vec{M}_0 \neq 0$ nhưng $\vec{R}' \not\perp \vec{M}_0$

Thật vậy, phân tích \vec{M}_0 thành hai thành phần \vec{M}'_0 cùng phương với \vec{R}' và $\vec{M}''_0 \perp \vec{R}'$ vì $\vec{R}' \perp \vec{M}''_0$ nên theo định lý đảo định lý dời lực song song $(\vec{R}', M'_0) \sim \vec{R}'_1$ đặt tại O' còn \vec{M}''_0 là véc tơ tự do, nên có thể dời đến đặt tại O' . Do đó hệ lực tương đương với hệ gồm một lực \vec{R}'_1 và ngẫu \vec{M}''_0 có véc tơ mô men song song với \vec{R}'_1 . Hệ lực có tính chất như vậy gọi là hệ xoắn hay dinh ốc (hình 2.6b).

Chú ý là hệ lực không gian chỉ có 4 dạng chuẩn trên, ngoài ra không còn dạng nào khác. Qua đây ta cũng thấy vai trò của véc tơ chính và mô men chính, tùy theo giá trị của chúng bằng không hay khác không mà hệ lực thu về các dạng chuẩn khác nhau. Chính vì vậy người ta gọi véc tơ chính và mô men chính là hai đặc trưng cơ bản của hệ lực.



Hình 2.6

5. Các dạng chuẩn của hệ lực đặc biệt

Căn cứ vào 4 dạng chuẩn của hệ lực không gian có thể suy ra các dạng chuẩn của các hệ lực đặc biệt.

a) Hệ lực đồng quy

Giả sử hệ lực đồng quy tại O , khi đó mô men chính của hệ đối với điểm O .

$$\vec{M}_0 = \sum_{k=1}^n \vec{m}_0(\vec{F}_k) = 0 \text{ vì vậy hệ lực đồng quy có hai dạng chuẩn sau:}$$

- Nếu $\vec{R}' = 0$ hệ cân bằng.
- Nếu $\vec{R}' \neq 0$ hệ có hợp lực.

b) Hệ ngẫu lực

Vì hệ ngẫu lực có véc tơ chính $\vec{R}' = \sum \vec{F}_k = 0$ nên hệ có 2 dạng chuẩn:

- Nếu $\vec{M}_0 = 0$ hệ cân bằng.
- Nếu $\vec{M}_0 \neq 0$ hệ thu về một ngẫu.

c) Hệ lực song song

Vì các lực của hệ song song với nhau nên vectơ chính của hệ \vec{R}' song song với các lực của hệ, còn các vectơ mômen của các lực đối với tâm O bất kỳ vuông góc với lực đó, nên $\vec{M}_0 \perp \vec{R}'$. Do đó hệ có 3 dạng chuẩn đầu tiên của hệ lực không gian.

d) Hệ lực phẳng

Vectơ chính của hệ song song với mặt phẳng tác dụng của hệ, còn vectơ mômen chính lại vuông góc với mặt phẳng đó nên $\vec{R}' \perp \vec{M}_0$. Hệ lực phẳng chỉ có 3 dạng chuẩn đầu tiên của hệ lực không gian.

6. Định lý VaRi Nhông

Định lý: Trong trường hợp hệ lực có hợp lực thì mô men của hợp lực đối với điểm bất kỳ bằng tổng mô men các lực của hệ đối với cùng điểm đó.

$$\vec{m}_0(\vec{R}) = \sum_{k=1}^n \vec{m}_0(\vec{F}_k) \quad (2.10)$$

Chứng minh:

Giả sử A là điểm nằm trên đường tác dụng của hợp lực; khi thu hệ lực về A ta được hợp lực \vec{R} , còn $\vec{M}_A = 0$. Áp dụng định lý biến thiên mô men chính đối với hai điểm A và O trong đó O là điểm bất kỳ ta có:

$$\vec{M}_0 = \vec{M}_A + \vec{m}_0(\vec{R})$$

$$\text{Vì } \vec{M}_0 = \sum_{k=1}^n \vec{m}_0(\vec{F}_k), \text{ nên: } \vec{m}_0(\vec{R}) = \sum_{k=1}^n \vec{m}_0(\vec{F}_k)$$

Ví dụ: Hợp lực của hệ lực phân bố.

Hệ lực phân bố: là hệ lực song song cùng chiều, phân bố liên tục trên độ dài $OA = l$. Độ lớn của lực tại tiết diện x gọi là cường độ của tải trọng phân bố $q(x)$, còn l gọi là độ dài chất tải. Tìm hợp lực \vec{Q} của hệ lực (hình 2.7a).

Vì vectơ chính của hệ khác 0 nên hệ có hợp lực song song cùng chiều với các lực của hệ và có độ lớn bằng độ lớn của vectơ chính.

$$Q = R' = \int_0^l q(x) dx \quad (1)$$

Như vậy hợp lực \vec{Q} có độ lớn bằng diện tích hình thang cong (xem hình 2.7a).

$$\text{Mô men chính của hệ lực đối với tâm O: } \vec{M}_0 = - \int_0^l q(x) \cdot x dx$$

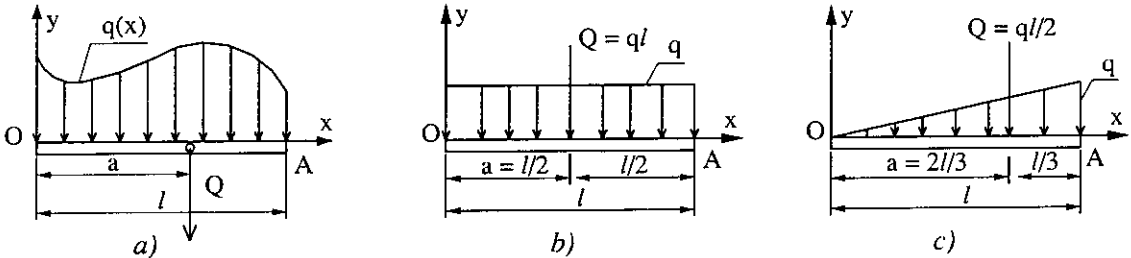
Giả sử \vec{Q} đặt tại C cách O một đoạn $OC = a$. Ta có: $\vec{m}_0(\vec{Q}) = -Q \cdot a$

Theo định lý Vari Nhông: $\overline{m}_o(\overline{Q}) = \overline{M}_o$

Hay:
$$Qa = \int_0^l q(x).xdx \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:
$$a = \frac{\int_0^l q(x).xdx}{\int_0^l q(x)dx} \quad (3)$$

Từ (3) suy ra hợp lực \overline{Q} đặt tại trọng tâm của hình thang cong (xem hình 2.7)



Hình 2.7

- Nếu hệ lực phân bố đều: $q(x) = q = \text{const}$ như hình 2.7b, ta có:

$$Q = \int_0^l q \, dx = ql; \quad \text{và} \quad \int_0^l q \, xdx = \frac{1}{2}ql^2. \quad \text{Thay vào (3) được: } a = \frac{l}{2}$$

Vậy hệ lực phân bố đều có hợp lực $Q = ql$ và đặt tại điểm giữa của độ dài chất tải.

- Nếu hệ lực phân bố theo quy luật tam giác như hình 2.7c ta có: $q(x) = q \cdot \frac{x}{l}$

$$Q = \int_0^l q(x)dx = \int_0^l q \frac{x}{l} dx = \frac{1}{2}ql; \quad \int_0^l q(x).xdx = \int_0^l q \frac{x^2}{l} dx = \frac{1}{3}ql^2$$

Thay vào (3) được $a = \frac{2}{3}l$. Vậy hệ lực phân bố theo quy luật tam giác có hợp lực

$Q = \frac{1}{2}ql$ bằng diện tích tam giác và đặt tại trọng tâm của tam giác.

2.3. ĐIỀU KIỆN CÂN BẰNG VÀ CÁC PHƯƠNG TRÌNH CÂN BẰNG CỦA HỆ LỰC KHÔNG GIAN

1. Điều kiện cân bằng tổng quát

Định lý: Điều kiện cân và đủ để hệ lực không gian cân bằng là véc tơ chính của hệ và véc tơ mômen chính của hệ đối với tâm O bất kỳ phải triệt tiêu.

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{R}'_0 = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k = 0 \\ \vec{M}_0 = \sum_{k=1}^n \vec{m}_0(\vec{F}_k) = 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

Chứng minh: Điều kiện cân được chứng minh bằng phương pháp phản chứng.

Giả sử hệ cân bằng mà một trong hai đại lượng \vec{R}' , \vec{M}_0 khác không hoặc cả hai khác không, khi đó hệ sẽ thu về một lực, một ngẫu hoặc một hệ xoắn trái với giả thiết là hệ cân bằng. Vậy khi hệ đã cân bằng thì $\vec{R}' = 0, \vec{M}_0 = 0$.

Điều kiện đủ suy trực tiếp từ dạng chuẩn thứ nhất của hệ lực không gian.

2. Các phương trình cân bằng của hệ lực không gian

Định lý: Điều kiện cân và đủ để hệ lực không gian cân bằng là tổng hình chiếu của các lực lên 3 trục của hệ tọa độ Đề Các vuông góc và tổng mômen của chúng đối với 3 trục ấy phải triệt tiêu.

Chứng minh: Theo điều kiện cân bằng tổng quát điều kiện cân và đủ để hệ lực không gian cân bằng là $\vec{R}' = 0, \vec{M}_0 = 0$. Hai véc tơ này bằng không khi và chỉ khi hình chiếu của chúng lên 3 trục tọa độ đồng thời bằng không.

Theo (2.1)' và (2.6) ta có:

$$\begin{aligned} R'_x = \sum_{k=1}^n X_k = 0 & \quad M_{0x} = hc_x \left[\sum_{k=1}^n \vec{m}_0(\vec{F}_k) \right] = \sum_{k=1}^n m_x(\vec{F}_k) = 0 \\ R'_y = \sum_{k=1}^n Y_k = 0 & \quad M_{0y} = hc_y \left[\sum_{k=1}^n \vec{m}_0(\vec{F}_k) \right] = \sum_{k=1}^n m_y(\vec{F}_k) = 0 \\ R'_z = \sum_{k=1}^n Z_k = 0 & \quad M_{0z} = hc_z \left[\sum_{k=1}^n \vec{m}_0(\vec{F}_k) \right] = \sum_{k=1}^n m_z(\vec{F}_k) = 0 \end{aligned}$$

Vậy hệ lực không gian có 6 phương trình cân bằng sau:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n X_k = 0 & \sum_{k=1}^n \vec{m}_x(\vec{F}_k) = 0 \\ \sum_{k=1}^n Y_k = 0 & \sum_{k=1}^n \vec{m}_y(\vec{F}_k) = 0 \\ \sum_{k=1}^n Z_k = 0 & \sum_{k=1}^n \vec{m}_z(\vec{F}_k) = 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

Chú ý: Đây là 6 phương trình cân bằng độc lập và tối đa của hệ lực không gian.

Nếu ngoài các lực, hệ còn có ngẫu lực, có véc tơ mô men \vec{M} thì 3 phương trình hình chiếu của hệ vẫn giữ nguyên, còn 3 phương trình mô men có dạng sau:

$$\sum_{k=1}^n \bar{m}_x(\vec{F}_k) + M_x = 0 \quad \sum_{k=1}^n \bar{m}_y(\vec{F}_k) + M_y = 0 \quad \sum_{k=1}^n \bar{m}_z(\vec{F}_k) + M_z = 0$$

Trong đó: M_x, M_y, M_z là hình chiếu của \vec{M} lên 3 trục tọa độ.

3. Các phương trình cân bằng của các hệ lực đặc biệt

Vì hệ lực không gian là hệ lực tổng quát nhất nên từ các phương trình cân bằng của hệ lực không gian có thể suy ra các phương trình cân bằng của các hệ lực khác.

a) Hệ lực đồng quy

Định lý: Điều kiện cần và đủ để hệ lực đồng quy cân bằng là tổng hình chiếu của các lực lên ba trục của hệ tọa độ Đề Các vuông góc phải triệt tiêu.

Chứng minh: Chọn điểm đồng quy của hệ làm gốc tọa độ thì 3 phương trình mô men trong (2.12) tự thỏa mãn. Vậy hệ lực đồng quy có 3 phương trình cân bằng.

$$\sum_{k=1}^n X_k = 0 \quad \sum_{k=1}^n Y_k = 0 \quad \sum_{k=1}^n Z_k = 0 \quad (2.13)$$

Nếu hệ lực đồng quy phẳng, chọn mặt phẳng tác dụng của hệ lực là mặt phẳng tọa độ Oxy, khi đó phương trình $\sum_{k=1}^n Z_k = 0$ tự thỏa mãn.

Hệ chỉ còn lại hai phương trình:

$$\sum_{k=1}^n X_k = 0 \quad \sum_{k=1}^n Y_k = 0 \quad (2.13)'$$

b) Hệ ngẫu lực

Định lý: Điều kiện cần và đủ để hệ ngẫu lực cân bằng là tổng hình chiếu các véc tơ mômen của các ngẫu lực lên 3 trục của hệ tọa độ Đề Các vuông góc phải triệt tiêu.

Chứng minh: Vì véc tơ chính của hệ ngẫu lực luôn bằng không nên điều kiện cân bằng của hệ ngẫu lực là $\vec{M} = \vec{m}_1 + \vec{m}_2 + \dots + \vec{m}_n = \sum_{k=1}^n \vec{m}_k = 0$

Chiếu hệ thức này lên 3 trục tọa độ được:

$$\sum_{k=1}^n \bar{m}_{kx} = 0 \quad \sum_{k=1}^n \bar{m}_{ky} = 0 \quad \sum_{k=1}^n \bar{m}_{kz} = 0 \quad (2.14)$$

Nếu các ngẫu lực cùng nằm trong một mặt phẳng chọn trục z vuông góc với mặt phẳng đó, hai phương trình đầu tự thỏa mãn còn hình chiếu của \vec{m}_k trên trục z bằng mômen đại số \bar{m}_k của ngẫu lực nên phương trình cân bằng của hệ ngẫu lực phẳng là:

$$\sum_{k=1}^n \bar{m}_k = 0 \quad (2.14)$$

c) Hệ lực song song

Định lý: Điều kiện cần và đủ để hệ lực song song cân bằng là tổng hình chiếu các lực lên trục z song song với các lực và tổng mômen của chúng đối với 2 trục x, y phải triệt tiêu.

Chứng minh: Thật vậy, vì các lực vuông góc với hai trục x, y và song song với trục z nên 3 phương trình :

$$\sum_{k=1}^n X_k = 0 \quad \sum_{k=1}^n Y_k = 0 \quad \sum \bar{m}_z(\vec{F}_k) = 0 \text{ tự thoả mãn.}$$

Do đó hệ có 3 phương trình cân bằng sau:

$$\sum_{k=1}^n Z_k = 0 \quad \sum_{k=1}^n \bar{m}_x(\vec{F}_k) = 0 \quad \sum_{k=1}^n \bar{m}_y(\vec{F}_k) = 0 \quad (2.15)$$

d) Hệ lực phẳng

Dạng 1: Điều kiện cần và đủ để hệ lực phẳng cân bằng là tổng hình chiếu của các lực lên hai trục x, y và tổng mô men của chúng đối với điểm O bất kì nằm trong mặt phẳng tác dụng của hệ lực triệt tiêu.

Thật vậy, chọn trục z vuông góc với mặt phẳng tác dụng của lực còn hai trục x, y nằm trong mặt phẳng đó thì 3 phương trình sau tự thoả mãn:

$$\sum_{k=1}^n Z_k = 0 \quad \sum_{k=1}^n \bar{m}_x(\vec{F}_k) = 0 \quad \sum_{k=1}^n \bar{m}_y(\vec{F}_k) = 0$$

Còn phương trình mô men thứ 3 có dạng:

$$\sum_{k=1}^n \bar{m}_z(\vec{F}_k) = \sum_{k=1}^n \bar{m}_O(\vec{F}_k) = 0$$

Vậy hệ lực phẳng có 3 phương trình cân bằng:

$$\sum_{k=1}^n X_k = 0 \quad \sum_{k=1}^n Y_k = 0 \quad \sum_{k=1}^n \bar{m}_O(\vec{F}_k) = 0 \quad (2.16)$$

Dạng 2: Điều kiện cần và đủ để hệ lực phẳng cân bằng là tổng mô men của các lực đối với hai điểm A, B và tổng hình chiếu của chúng lên trục x không vuông góc với AB phải triệt tiêu.

$$\sum_{k=1}^n \bar{m}_A(\vec{F}_k) = 0 \quad \sum_{k=1}^n \bar{m}_B(\vec{F}_k) = 0 \quad \sum_{k=1}^n X_k = 0 \quad (2.17)$$

Điều kiện cân là hiển nhiên vì khi hệ lực cân bằng thì theo điều kiện cân bằng tổng quát véctơ chính và mô men chính của hệ đối với 1 tâm bất kì phải triệt tiêu do đó:

$$\overline{M}_A = \sum_{k=1}^n \overline{m}_A(\vec{F}_k) = 0 \quad \overline{M}_B = \sum_{k=1}^n \overline{m}_B(\vec{F}_k) = 0 \quad R'_x = \sum_{k=1}^n X_k = 0$$

Ta chứng minh điều kiện đủ như sau: Giả sử hệ lực thoả mãn (2.17).

Theo định lí biến thiên mômen chính $\overline{M}_B = \overline{M}_A + \overline{m}_B(\overline{R}'_A)$

Vì $\overline{M}_B = \overline{M}_A = 0$ nên $\overline{m}_B(\overline{R}'_A) = 0$. Khi đó hoặc $\overline{R}'_A = 0$, hoặc khác 0 nhưng phải qua B. Nếu $\overline{R}'_A \neq 0$ và qua B thì $R'_x = \sum_{k=1}^n X_k \neq 0$ trái với giả thiết là $\sum_{k=1}^n X_k = 0$. Vậy $\overline{R}'_A = 0$. Khi véctơ chính đã bằng không thì mô men chính không phụ thuộc vào điểm lấy mômen $\overline{M}_0 = \overline{M}_A = 0$ theo giả thiết. Do đó hệ đã có véctơ chính và mô men chính đối với điểm bất kì bằng không sẽ cân bằng theo điều kiện cân bằng tổng quát.

Dạng 3: Điều kiện cân và đủ để hệ lực phẳng cân bằng là tổng mômen của các lực đối với 3 điểm A, B, C không thẳng hàng triệt tiêu:

$$\sum_{k=1}^n \overline{m}_A(\vec{F}_k) = 0 \quad \sum_{k=1}^n \overline{m}_B(\vec{F}_k) = 0 \quad \sum_{k=1}^n \overline{m}_C(\vec{F}_k) = 0 \quad (2.18)$$

Điều kiện cân là hiển nhiên. Điều kiện đủ được chứng minh như sau:

Giả sử hệ thoả mãn (2.18). Áp dụng định lí biến thiên mô men chính đối với hai cặp điểm A, B và C. Tương tự như chứng minh dạng 2 để cho $\overline{R}'_A \neq 0$ thì \overline{R}'_A phải đi qua 3 điểm A, B, C không thẳng hàng. Đó là điều vô lý, vậy $\overline{R}'_A = 0$. Cũng lập luận như chứng minh dạng 2, hệ phải cân bằng.

Trong hệ lực phẳng có một hệ lực đặc biệt là hệ lực phẳng song song. Hệ lực này có 2 dạng phương trình cân bằng sau:

Dạng 1: Theo điều kiện cân bằng dạng 1 của hệ lực phẳng ta có:

Định lý: Điều kiện cân và đủ để hệ lực phẳng song song cân bằng là tổng hình chiếu của các lực lên trục y song song với các lực và tổng mômen của chúng đối với tâm O bất kỳ phải triệt tiêu:

$$\sum_{k=1}^n Y_k = 0 \quad \sum_{k=1}^n \overline{m}_O(\vec{F}_k) = 0 \quad (2.19)$$

Dạng 2: Có thể chứng minh định lý sau:

Định lý: Điều kiện cân và đủ để hệ lực phẳng song song cân bằng là tổng mô men của các lực đối với hai điểm A, B bất kì đều bằng 0, với điều kiện AB không song song với các lực:

$$\sum_{k=1}^n \bar{m}_A(\vec{F}_k) = 0 \quad \sum_{k=1}^n \bar{m}_B(\vec{F}_k) = 0 \quad (2.20)$$

4. Bài toán tĩnh học và phương pháp giải

Trong kỹ thuật người ta thường phải xét sự cân bằng của các công trình dưới dạng một vật rắn chịu tác dụng của một hệ lực nào đó. Yêu cầu của bài toán là tìm một số lực chưa biết hoặc một số các thông số (độ dài, góc...) chưa biết để vật cân bằng. Bài toán được đưa về việc khảo sát sự cân bằng của hệ lực tác dụng lên vật rắn.

Phương pháp giải bài toán gồm các bước như sau:

a) *Chọn vật khảo sát:* Vật khảo sát là vật rắn mà ta chọn để nghiên cứu sự cân bằng của nó. Phải chọn vật khảo sát sao cho lập được một hệ lực cân bằng tác dụng lên nó, bao gồm cả những lực đã biết và những lực chưa biết, hoặc có liên quan đến các thông số cần tìm.

b) *Đặt lực:* Phát hiện và vẽ đầy đủ các lực tác dụng lên vật khảo sát, đầu tiên là các lực cho, sau đó giải phóng các liên kết, thay thế các liên kết được giải phóng bằng các phản lực liên kết tương ứng. Cuối cùng ta có vật khảo sát là một vật tự do cân bằng, chịu tác dụng của một hệ lực cân bằng tương ứng. Nhận xét tính chất hình học của hệ lực.

c) *Viết điều kiện cân bằng:* Viết các phương trình cân bằng của hệ lực tác dụng lên vật. Nên dựa vào các đặc điểm hình học của hệ lực mà lập các phương trình sao cho dễ giải nhất.

d) *Giải và biện luận:* Giải các phương trình vừa lập, tìm các ẩn số của bài toán, biện luận các kết quả tìm được.

Ví dụ 1: Hai thanh AO và BO không trọng lượng, nối với nhau và nối với tường bằng các bản lề O, A, B. Ở O treo vật trọng lượng P. Tìm ứng lực trong các thanh. Biết AO vuông góc với tường, BO lập với tường một góc $\alpha = 45^\circ$.

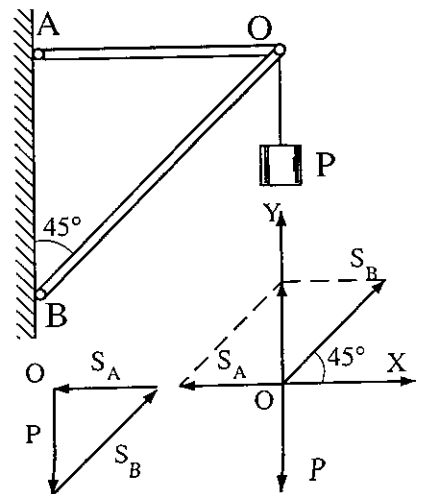
Bài giải:

- Phương pháp giải tích:

Xét cân bằng nút O, các lực tác dụng lên O gồm trọng lượng \vec{P} của vật, các phản lực liên kết thanh \vec{S}_A, \vec{S}_B hướng dọc theo thanh (giả thiết chiều như hình 2.8). Để O cân bằng thì: $(\vec{P}, \vec{S}_A, \vec{S}_B) \sim 0$.

Đây là hệ lực đồng quy phẳng. Có hai phương trình cân bằng.

Chọn hai trục tọa độ như hình vẽ ta có:



Hình 2.8

$$\sum_{k=1}^n X_k = S_B \cos 45^\circ - S_A = 0 \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^n Y_k = S_B \cos 45^\circ - P = 0 \quad (2)$$

Từ (2) $\Rightarrow S_B = \frac{P}{\cos 45^\circ} = P\sqrt{2} > 0$. So sánh (1) và (2) $\Rightarrow S_A = P > 0$.

Các giá trị S_A, S_B tính được đều dương nên chiều phản lực liên kết thanh giả thiết là đúng, vậy thanh AO bị kéo còn thanh BO bị nén.

- Phương pháp hình học:

Hệ 3 lực $(\vec{P}, \vec{S}_A, \vec{S}_B) \sim 0$ nên véc tơ chính của hệ phải triệt tiêu, do đó đa giác lực của hệ phải tự khép kín.

Để xác định \vec{S}_A, \vec{S}_B , đầu tiên từ O ta vẽ lực \vec{P} , từ mũi và góc của \vec{P} vẽ các đường thẳng song song với \vec{S}_A, \vec{S}_B được đa giác lực của hệ. Từ đa giác lực của hệ ta có:

$$S_A = P; \quad S_B = P\sqrt{2}$$

Chiều của các lực \vec{S}_A, \vec{S}_B , thuận theo chiều của \vec{P} .

Ví dụ 2: Đầu mút A của dầm đồng chất AB dài 2m, trọng lượng 50N, tựa vào tường trơn thẳng đứng. Đầu B được buộc vào dây BC sao cho AB làm với tường một góc 45° .

Tim khoảng cách AC để dầm cân bằng. Tim sức căng dây BC và phản lực của tường.

Bài giải:

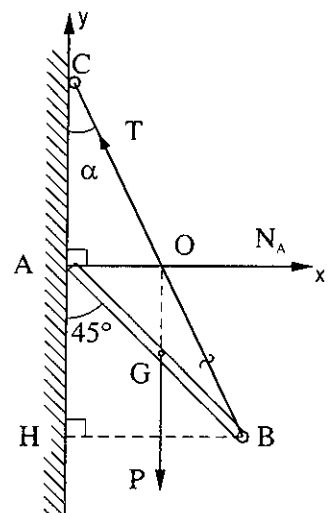
Xét cân bằng dầm AB. Các lực tác dụng lên AB gồm trọng lượng \vec{P} của dầm đặt tại điểm giữa G của dầm, phản lực \vec{N}_A của tường vuông góc với tường, sức căng dây BC hướng dọc theo dây.

Để AB cân bằng thì: $(\vec{P}, \vec{N}_A, \vec{T}) \sim 0$

Đây là hệ 3 lực phẳng cân bằng, mà hai lực \vec{P} và \vec{N}_A đã giao nhau tại O, nên theo định lí 3 lực cân bằng, sức căng \vec{T} của dây cũng phải qua O.

Vì G là điểm giữa của AB, nên O là điểm giữa của BC và A là điểm giữa của CH: $AC = AH = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \text{ m}$.

Gọi α là góc lập giữa AC và BC ta có:



Hình 2.9

$$\sin\alpha = \frac{HB}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 8} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

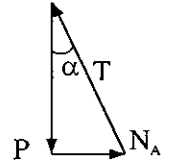
Viết hai phương trình cân bằng của hệ lực đồng quy phẳng ta được:

$$\sum X_k = N_A - T \sin\alpha = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y_k = T \cos\alpha - P = 0 \quad (2)$$

Từ (2) ta có:
$$T = \frac{P}{\cos\alpha} = \frac{P\sqrt{5}}{2} = \frac{50\sqrt{5}}{2} = 25\sqrt{5} \text{ N}$$

Từ (1) suy ra:
$$N_A = T \sin\alpha = 25\sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 25 \text{ N}$$



Hình 2.10

Chú ý ta có thể giải bài này bằng phương pháp hình học như sau:

Đầu tiên vẽ lực \vec{P} , từ gốc và ngọn của \vec{P} vẽ các đường thẳng song song với hai lực \vec{N}_A và \vec{T} được đa giác lực của hệ. Vì hệ lực $(\vec{P}, \vec{N}_A, \vec{T}) \sim 0$ nên đa giác lực của hệ tự khép kín, chiều của \vec{N}_A, \vec{T} thuận theo chiều của \vec{P} trong đa giác lực. Từ đa giác lực ta có:

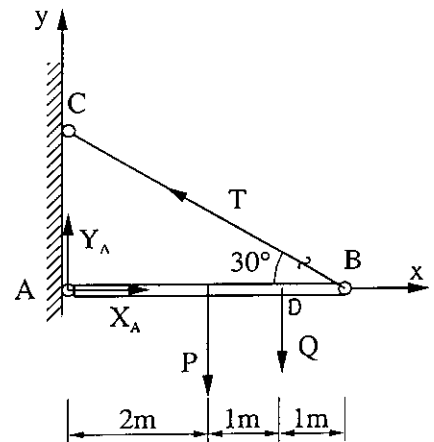
$$T = \frac{P}{\cos\alpha} = 25\sqrt{5} \text{ N}; \quad N_A = T \sin\alpha = 25 \text{ N}$$

Vi dụ 3: Dầm đồng chất AB trọng lượng P, được giữ nằm ngang nhờ bản lề trụ A gắn vào tường và dây treo BC. Biết góc giữa AB và BC là $\alpha = 30^\circ$, độ dài dầm AB = 4m. Đặt tại D vật nặng trọng lượng Q, biết DB = 1m.

Xác định phản lực liên kết ở A và sức căng của dây.

Bài giải:

Xét cân bằng AB. Các lực tác dụng lên AB gồm \vec{P}, \vec{Q} các phản lực liên kết tại bản lề trụ A: \vec{X}_A, \vec{Y}_A và sức căng \vec{T} của dây BC.



Hình 2.11

Để AB cân bằng thì: $(\vec{P}, \vec{Q}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{T}) \sim 0$.

Đây là hệ lực phẳng có 3 phương trình cân bằng, chọn hệ trục như hình vẽ ta có:

$$\sum X_k = X_A - T \cos 30^\circ = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y_k = Y_A - P - Q + T \cos 60^\circ = 0 \quad (2)$$

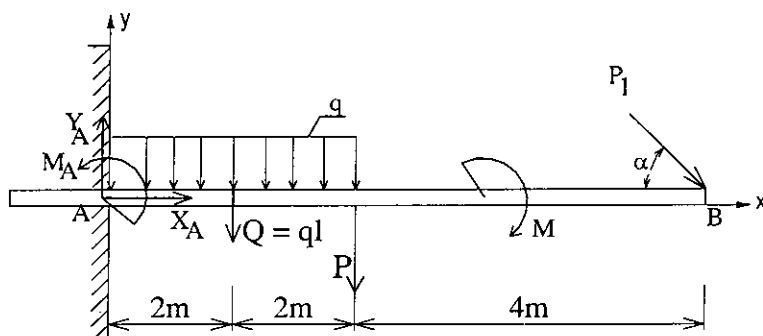
$$\sum \bar{m}_A(\vec{F}_k) = T \cdot 4 \sin 30^\circ - 2P - 3Q = 0 \quad (3)$$

Từ phương trình (3) ta suy ra: $T = \frac{2P+3Q}{2} = P + \frac{3}{2}Q$

Thay vào (1) ta có: $X_A = T \cos 30^\circ = \left(P + \frac{3}{2}Q\right) \frac{\sqrt{3}}{2}$

Từ (2) $\Rightarrow Y_A = P + Q - T \cos 60^\circ = P + Q - \frac{1}{2} \left(P + \frac{3}{2}Q\right) = \frac{P}{2} + \frac{Q}{4}$

Vi dụ 4: Dầm đồng chất AB trọng lượng $P = 4\text{KN}$, ngàm đầu A vào tường chịu tải trọng phân bố đều có cường độ $q = 1 \text{ KN/m}$. Trên dầm tác dụng ngẫu có mômen $M = 8\text{KN.m}$, lực $P_1 = 2\sqrt{2} \text{ KN}$. Xác định phản lực liên kết ở ngàm A. Biết $\alpha = 45^\circ$.



Hình 2.12

Bài giải:

Xét cân bằng AB. Các lực tác dụng lên AB gồm có trọng lượng P đặt tại giữa dầm, lực P_1 lập với AB góc $\alpha = 45^\circ$, hợp lực của hệ lực phân bố đều $Q = q.l = 1.4 = 4\text{KN}$, ngẫu M và phản lực liên kết ở ngàm A gồm \bar{X}_A , \bar{Y}_A , ngẫu M_A . Để AB cân bằng thì hệ lực tác dụng lên nó phải cân bằng ($\bar{P}, \bar{Q}, \bar{P}_1, ngM, \bar{X}_A, \bar{Y}_A, ngM_A$) ~ 0 .

Đây là hệ lực phẳng nên có 3 phương trình cân bằng, chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ ta được:

$$\Sigma X_k = X_A + P_1 \cos 45^\circ = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma Y_k = Y_A - Q - P - P_1 \sin 45^\circ = 0 \quad (2)$$

$$\Sigma \bar{m}_A = M_A - 2Q - 4P - M - 8 P_1 \sin 45^\circ = 0 \quad (3)$$

Giải hệ phương trình trên ta được:

$$X_A = - P_1 \frac{\sqrt{2}}{2} = - 2\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = - 2\text{KN} < 0$$

$$Y_A = Q + P + P_1 \frac{\sqrt{2}}{2} = 4 + 4 + 2\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = 10\text{KN}$$

$$M_A = 2Q + 4P + M + 8 \cdot 2\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = 8 + 16 + 8 + 16 = 48 \text{KN.m}$$

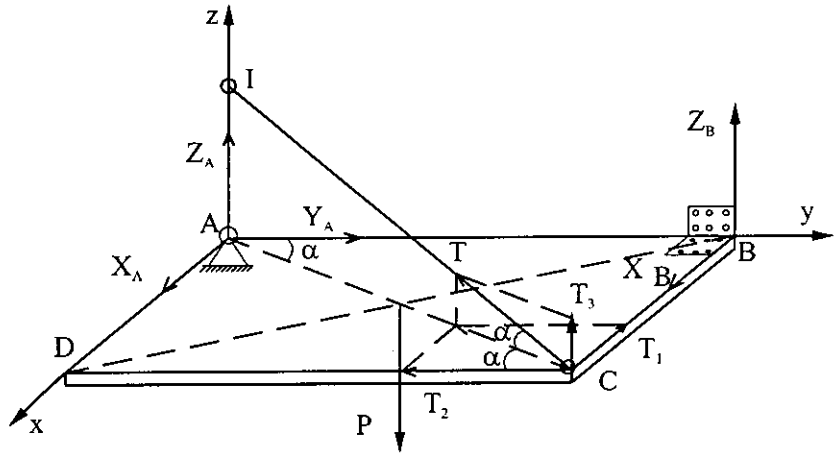
Giá trị $X_A < 0$. Vậy chiều của phản lực \bar{X}_A ngược với chiều giả thiết.

Ví dụ 5: Tấm chữ nhật đồng chất ABCD trọng lượng P được giữ trong mặt phẳng nằm ngang nhờ có khớp cầu ở A, liên kết bản lề trụ ở B và dây mềm CI. Biết $\alpha = 30^\circ$. Xác định phản lực liên kết ở A, B và sức căng của dây CI.

Bài giải:

Xét cân bằng tấm ABCD vì tấm đồng chất nên trọng lượng của tấm đặt tại giao điểm hai đường chéo. Phản lực của liên kết khớp cầu gồm 3 thành phần theo 3 trục $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{Z}_A$. Phản lực liên kết bản lề trụ gồm hai thành phần \bar{X}_B, \bar{Z}_B vuông góc với trục bản lề, lực căng dây \bar{T} .

Hình 2.13



Để tấm cân bằng, hệ lực tác dụng lên tấm phải cân bằng:

$$(\bar{P}, \bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{Z}_A, \bar{X}_B, \bar{Z}_B, \bar{T}) \sim 0$$

Đây là hệ lực không gian có 6 phương trình cân bằng.

Chọn hệ trục tọa độ Axyz như hình vẽ. Đặt $AB = 2a, BC = 2b$. Để lập các phương trình cân bằng cho thuận tiện ta phân tích lực \bar{T} thành 3 thành phần theo 3 trục tọa độ.

$$T_1 = T \cos 30^\circ \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} T;$$

$$T_2 = T \cos 30^\circ \cos 30^\circ = \frac{3}{4} T;$$

$$T_3 = T \cos 60^\circ = \frac{T}{2}$$

Ta có hệ phương trình:

$$\sum X_k = X_A + X_B - T_1 = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y_k = Y_A - T_2 = 0 \quad (2)$$

$$\sum Z_k = Z_A - P + T_3 + Z_B = 0 \quad (3)$$

$$\sum \overline{m_x} = 2aZ_B - aP + 2aT_3 = 0 \quad (4)$$

$$\sum \overline{m_y} = bP - 2bT_3 = 0 \quad (5)$$

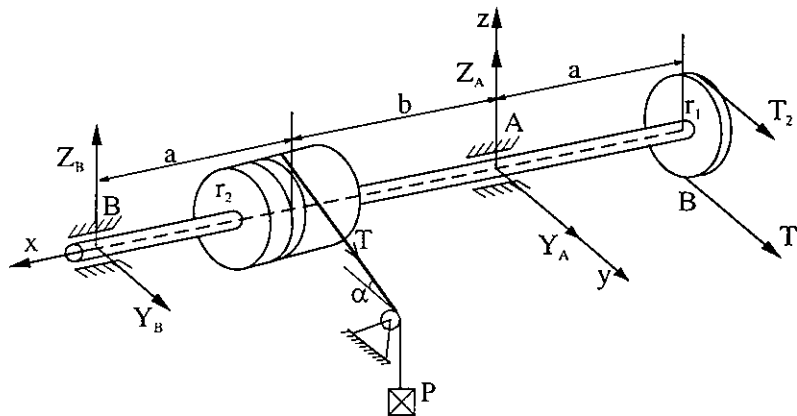
$$\sum \overline{m_z} = -2aX_B = 0 \quad (6)$$

Giải các phương trình trên ta tìm được:

$$X_B = 0; \quad Z_B = 0; \quad T = P; \quad X_A = \frac{\sqrt{3}}{4}P; \quad Y_A = \frac{3}{4}P; \quad Z_A = \frac{P}{2}$$

Các giá trị của các phản lực liên kết tính được đều không âm vậy chiều các phản lực liên kết giả thiết là đúng.

Ví dụ 6: Trục AB được giữ nằm ngang nhờ hai ổ đỡ A, B. Một đĩa tròn bán kính r_1 được gắn vuông góc với trục, các sức căng $\overline{T_1}$, $\overline{T_2}$ song song với trục y và $T_1 = 2T_2$. Trên trục còn gắn trụ tròn bán kính r_2 . Một sợi dây mềm không giãn cuốn vào trụ và vắt qua ròng rọc cố định, đầu dây buộc vật trọng lượng P. Dây làm với phương ngang góc $\alpha = 30^\circ$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với trục x. Bỏ qua trọng lượng của kết cấu tìm phản lực liên kết tại 2 ổ đỡ A, B và các sức căng T_1, T_2 . Biết $a = 40\text{cm}$, $b = 60\text{cm}$, $r_1 = 20\text{cm}$, $r_2 = 15\text{cm}$, $P = 180\text{N}$.



Hình 2.14

Bài giải:

Xét cân bằng trục AB. Các lực tác dụng lên trục gồm $\overline{T_1}$, $\overline{T_2}$; sức căng \overline{T} của dây; phản lực ở hai ổ trục A, B, $\overline{Y_A}$, $\overline{Z_A}$, $\overline{Y_B}$, $\overline{Z_B}$.

Để AB cân bằng thì: $(\overline{T}, \overline{T}_1, \overline{T}_2, \overline{Y}_A, \overline{Z}_A, \overline{Y}_B, \overline{Z}_B) \sim 0$

Đây là hệ lực không gian có 6 phương trình cân bằng:

$$\sum X_k = 0 \text{ tự thoả mãn.}$$

$$\sum Y_k = Y_A + Y_B + T_1 + T_2 + T \cos \alpha = 0 \quad (1)$$

$$\sum Z_k = Z_A + Z_B - T \sin \alpha = 0 \quad (2)$$

$$\sum \overline{m}_x = T_1 r_1 - T_2 r_1 - T r_2 = 0 \quad (3)$$

$$\sum \overline{m}_y = -(a+b) \cdot Z_B + b T \sin \alpha = 0 \quad (4)$$

$$\sum \overline{m}_z = (a+b) \cdot Y_B + b T \cos \alpha - a(T_1 + T_2) = 0 \quad (5)$$

Từ (3) suy ra: $T_2 = \frac{r_2}{r_1} p = 135\text{N} \Rightarrow T_1 = 2T_2 = 270\text{N}$

Từ (4) ta có: $Z_B = \frac{b}{a+b} p \cdot \sin \alpha = 54\text{N}$

Từ (5) suy ra: $Y_B = \frac{3aT_2 - bP \cos \alpha}{a+b} \approx 69\text{N}$

Thay các giá trị trên vào (1), (2) ta được:

$$Y_A = -Y_B - 3T_2 - T \cos \alpha = -630\text{N}; \quad Z_A = P \sin \alpha - Z_B = 36\text{N}$$

Ví dụ 7:

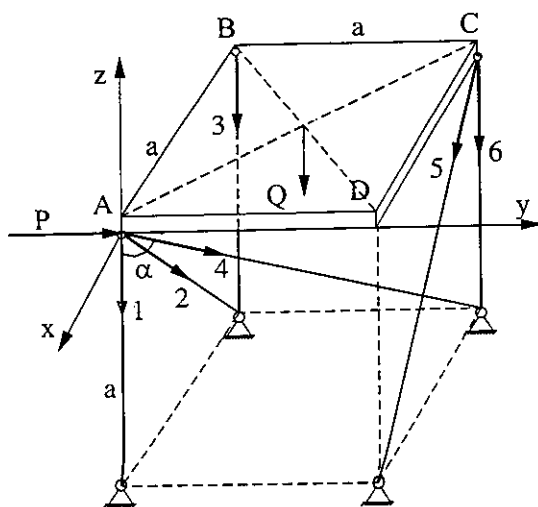
Tấm hình vuông đồng chất ABCD trọng lượng Q được giữ nằm ngang nhờ 6 thanh không trọng lượng. Toàn bộ kết cấu lập thành hình lập phương. Lực \vec{P} tác dụng dọc theo AD. Tìm ứng lực trong 6 thanh.

Bài giải:

Xét cân bằng tấm ABCD. Các lực tác dụng lên tấm gồm \vec{P}, \vec{Q} ; các phản lực liên kết thanh hướng dọc theo thanh, chiều giả thiết như hình vẽ. Chọn hệ trục tọa độ Axyz như hình vẽ.

Gọi α là góc lập giữa \vec{S}_4 và 3 cạnh của hình lập phương ta có: $\cos \alpha = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Chú ý các thanh 2, 5 làm với hai cạnh của hình lập phương góc 45° .



Hình 2.15

Để tấm cân bằng thì: $(\bar{P}, \bar{Q}, \bar{S}_1, \bar{S}_2, \bar{S}_3, \bar{S}_4, \bar{S}_5, \bar{S}_6) \sim 0$.

Đây là hệ lực không gian có 6 phương trình cân bằng:

$$\sum X_k = S_5 \cos 45^\circ - S_2 \cos 45^\circ - S_4 \cos \alpha = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y_k = P + S_4 \cos \alpha = 0 \quad (2)$$

$$\sum Z_k = -S_1 - S_2 \cos 45^\circ - S_3 - S_4 \cos \alpha - S_5 \cos 45^\circ - S_6 - Q = 0 \quad (3)$$

$$\sum \bar{m}_x = -aS_5 \cos 45^\circ - aS_6 - \frac{a}{2} Q = 0 \quad (4)$$

$$\sum \bar{m}_y = -aS_3 - aS_6 - aS_5 \cos 45^\circ - \frac{a}{2} Q = 0 \quad (5)$$

$$\sum \bar{m}_z = -aS_5 \cos 45^\circ = 0 \quad (6)$$

Từ (6) suy ra: $S_5 = 0$. Từ (2) có: $S_4 = \frac{-P}{\cos \alpha} = -P\sqrt{3}$

Từ (4) suy ra: $S_6 = -\frac{Q}{2}$ Từ (5) có: $S_3 = -S_6 - \frac{Q}{2} = 0$

Từ (1) suy ra: $S_2 = P\sqrt{2}$ Từ (3) có: $S_1 = -\frac{Q}{2}$

S_1, S_4, S_6 có giá trị âm nên các thanh 1, 4, 6 bị nén. $S_2 > 0$ nên thanh 2 chịu kéo.

$S_3 = S_5 = 0$ nên các thanh 3, 5 không chịu lực.

2.5. CÁC BÀI TOÁN ĐẶC BIỆT CỦA TĨNH HỌC

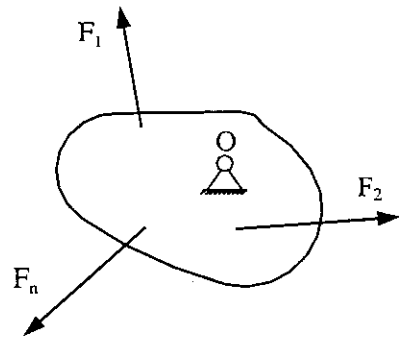
1. Bài toán đòn phẳng

a) Bài toán:

Đòn phẳng là vật rắn có thể quay quanh một trục cố định, chịu tác dụng của hệ lực nằm trong mặt phẳng vuông góc với trục quay.

Giả sử lúc đầu đòn phẳng đứng yên, bài toán đặt ra là tìm điều kiện ràng buộc hệ lực hoạt động $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$ để sau khi tác dụng lên đòn, đòn vẫn đứng yên.

Đòn phẳng chỉ có thể quay quanh trục qua O nên theo ý nghĩa cơ học mô men của lực đối với một điểm, điều kiện để đòn đứng yên là:



Hình 2.16

$$\sum_{k=1}^n \bar{m}_0(\vec{F}_k) = 0 \quad (2.21)$$

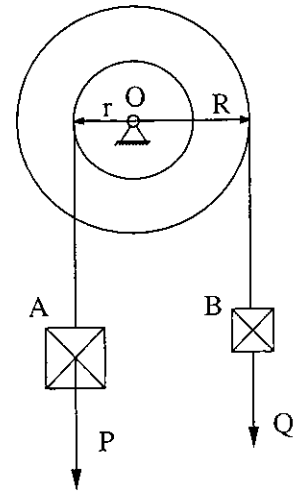
b) Ví dụ:

Ròng rọc 2 tầng bán kính là r, R ; tầng trong được cuốn dây và treo vật nặng A trọng lượng P , tầng ngoài cũng được cuốn dây và treo vật B trọng lượng Q . Khi đó P, Q phải thỏa mãn điều kiện nào để ròng rọc đứng yên?

Bài giải

Ròng rọc là một đòn phẳng quay quanh O chịu tác dụng của các lực hoạt động \vec{P}, \vec{Q} . Để ròng rọc cân bằng thì:

$$\sum \bar{m}_0(\vec{F}_k) = rP - RQ = 0, \text{ Suy ra: } Q = \frac{r}{R}P$$



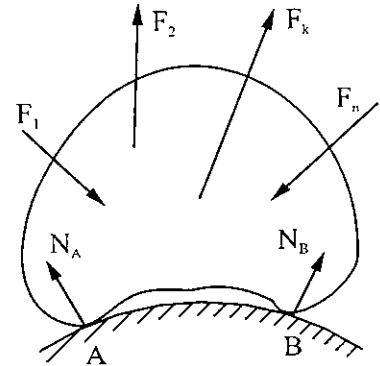
Hình 2.17

2. Bài toán vật lật

a) Bài toán:

Vật rắn tựa trên mặt cố định tại 2 điểm A, B chịu tác dụng của hệ lực phẳng $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$. Nếu có sự thay đổi của các lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$, vật có thể bị mất liên kết ở A hoặc B .

Giả sử mất liên kết ở B vật có thể bị lật quanh A , yêu cầu của bài toán là tìm điều kiện ràng buộc hệ lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ để vật không lật quanh A .



Hình 2.18

Phương pháp giải: Để giải bài toán ta tiến hành theo trình tự sau:

- Xác định điểm lật.
- Phân các lực hoạt động $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ thành hai loại:
 - + Lực lật là các lực có khả năng làm lật vật quanh điểm lật đã được xác định.
 - + Lực giữ là các lực giữ cho vật không bị lật quanh điểm lật đã được xác định.
- Tính tổng trị số của các mô men lực giữ đối với điểm lật, gọi là mô men giữ, ký hiệu là $M_{\text{giữ}}$.
- Tính tổng trị số mô men của các lực lật đối với điểm lật, gọi là mô men lật, ký hiệu là $M_{\text{lật}}$.

- Điều kiện để vật không lật là: $M_{\text{giữ}} \geq M_{\text{lật}}$

b) Ví dụ:

Cần cẩu tháp tựa trên hai đường ray tại hai điểm A, B. Trọng lượng chung của đối trọng và cần cẩu là Q, trọng lượng của vật nặng là P.

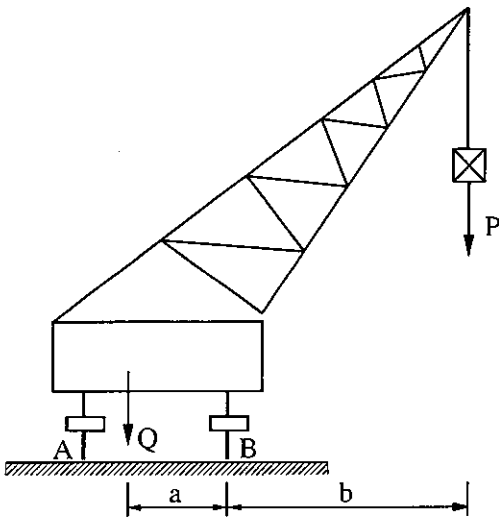
Tim điều kiện để cần cẩu không bị lật.

Bài giải

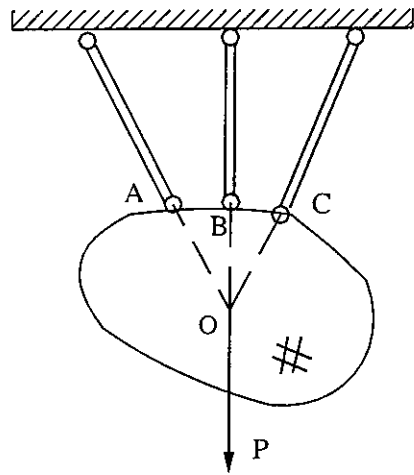
Các lực hoạt động tác dụng lên cần cẩu là \bar{P} , \bar{Q} . Cần cẩu có thể bị lật quanh điểm B khi P quá lớn. Như vậy \bar{Q} là lực giữ, \bar{P} là lực lật. Điều kiện không lật là:

$$M_{\text{giữ}} = Qa \geq Pb = M_{\text{lật}}$$

Do đó: $P \leq \frac{a}{b}Q$



Hình 2.19



Hình 2.20

3. Bài toán siêu tĩnh

Trong thực tế kỹ thuật ta thường gặp phải các bài toán tĩnh học trong đó số ẩn số lớn hơn số phương trình cân bằng tĩnh học: Chẳng hạn như một vật được treo lên trần bằng 3 thanh không trọng lượng nằm trong cùng một mặt phẳng, cùng đi qua trọng tâm của vật. Yêu cầu xác định ứng lực trong các thanh.

Bài toán có 3 ẩn số nhưng chỉ có hai phương trình cân bằng, đó là hai phương trình hình chiếu lên hai trục x, y của hệ lực đồng quy phẳng. Vì vậy bài toán không giải được.

Những bài toán như vậy được gọi là các bài toán siêu tĩnh. Để giải được ta phải thêm vào các phương trình biến dạng. Môn Sức bền vật liệu và Cơ học kết cấu sẽ giúp ta giải quyết những bài toán đó.

4. Bài toán cân bằng của hệ vật rắn chịu tác dụng của hệ lực phẳng

a) *Bài toán:* Khi tính toán công trình và cơ cấu máy, ta thường gặp bài toán khảo sát cân bằng và xác định phản lực liên kết của hệ nhiều vật rắn có liên kết với nhau và chịu tác dụng của một hệ lực phẳng.

b) *Phân tích bài toán:* Để giải bài toán này ta cần phân loại các lực tác dụng lên hệ thành nội lực và ngoại lực.

Nội lực là các lực tác dụng tương hỗ giữa hai vật của hệ, theo tiên đề tác dụng và phản tác dụng, chúng là các lực cùng đường tác dụng hướng ngược chiều, cùng cường độ, do đó khi xét cân bằng của cả hệ thì không có mặt nội lực.

Ngoại lực là các lực từ bên ngoài tác dụng lên các vật của hệ.

Giả sử hệ có n vật, mỗi vật cân bằng có 3 phương trình cân bằng độc lập, do đó cả hệ có $3n$ phương trình cân bằng độc lập. Nếu số ẩn số của bài toán vượt quá $3n$ thì ta không giải được, đó là bài toán siêu tĩnh, sẽ được giải trong môn học Sức bền vật liệu và Cơ học kết cấu.

c) *Phương pháp giải:* Có hai phương pháp giải bài toán hệ vật:

- Phương pháp hoá rắn kết hợp với tách vật:

Áp dụng tiên đề hoá rắn, coi hệ là một vật rắn cân bằng, viết được 3 phương trình cân bằng, sau đó xét cân bằng của $(n-1)$ vật riêng biệt để có thêm $3(n-1)$ phương trình. Chú ý khi hoá rắn, do tính chất của nội lực, hệ lực tác dụng lên hệ chỉ gồm các ngoại lực.

- Phương pháp tách riêng từng vật:

Khảo sát cân bằng từng vật của hệ, ta có $3n$ phương trình để xác định $3n$ ẩn số.

Khi xét cân bằng từng vật cần chú ý đến tính chất nội lực là từng cặp có cùng đường tác dụng ngược chiều nhau và có cùng cường độ.

Ví dụ 1: Cầu gồm hai phần AC và CB được nối với nhau bằng khớp C và dây xích EF. Liên kết ở A là gối tựa cố định còn B là gối tựa con lăn. Tải trọng phân bố đều trên mặt cầu có cường độ $q = 2\text{KN/m}$, trọng lượng của hai phần cầu $P_1 = P_2 = 10\text{KN}$ đặt cách mép cầu 1 đoạn bằng 1m . Bỏ qua trọng lượng của dây xích. Xác định phản lực liên kết ở A, B, C và sức căng của dây xích. Kích thước cho trên hình vẽ.

Bài giải: Hoá rắn xét cân bằng toàn hệ. Hợp lực của hệ lực phân bố đều đặt tại C:

$$Q = ql = 8.2 = 16\text{KN}$$

Phản lực liên kết của gối tựa cố định A gồm hai thành phần \bar{X}_A, \bar{Y}_A

Phản lực liên kết gối tựa con lăn ở B có một thành phần \bar{Y}_B .

Để cầu cân bằng hệ lực tác dụng lên cầu phải cân bằng.

$$(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{Q}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Y}_B) \sim 0$$

Chọn các trục x, y như hình vẽ ta có các phương trình:

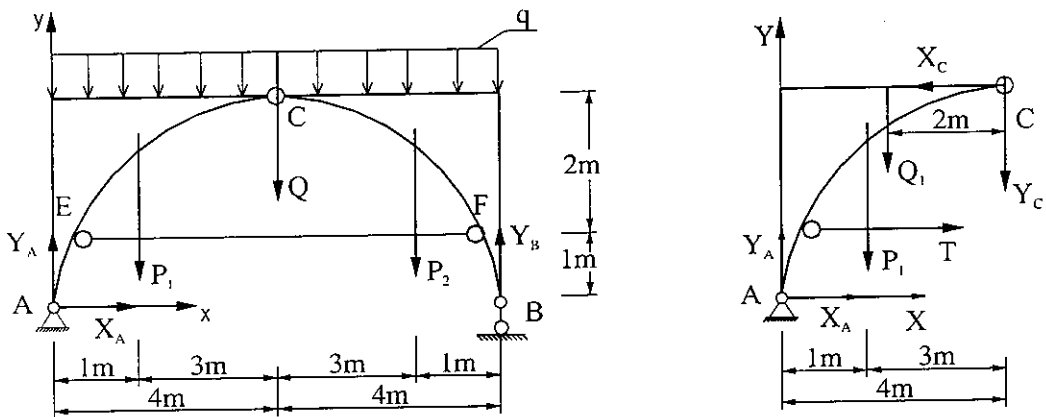
$$\sum X_k = X_A = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y_k = Y_A + Y_B - P_1 - P_2 - Q = 0 \quad (2)$$

$$\sum \overline{m}_A(\vec{F}_k) = 8Y_B - 7P_2 - 4Q - P_1 = 0 \quad (3)$$

Từ (3) suy ra: $Y_B = P + \frac{Q}{2} = 10 + \frac{16}{2} = 18\text{KN}$

Thay vào (2) ta được: $Y_A = P_1 + P_2 + Q - Y_B = 18\text{KN}$



Hình 2.21

Xét cân bằng AC thay liên kết khớp C bằng hai phản lực \vec{X}_C, \vec{Y}_C . Hợp lực \vec{Q}_1 của tải trọng phân bố đều trên AC: $Q_1 = ql_1 = 2.4 = 8\text{kN}$. Dây EF được thay bằng sức căng \vec{T} của dây ta có: $(\vec{P}_1, \vec{Q}_1, \vec{Y}_A, \vec{T}, \vec{X}_C, \vec{Y}_C) \sim 0$

$$\sum X_k = T - X_C = 0 \quad (4)$$

$$\sum Y_k = Y_A - P_1 - Q_1 - Y_C = 0 \quad (5)$$

$$\sum \overline{m}_C(\vec{F}_k) = 2T + 3P_1 + 2Q_1 - 4Y_A = 0 \quad (6)$$

Từ (6) suy ra: $T = \frac{1}{2}(4Y_A - 3P_1 - 2Q_1) = 2Y_A - \frac{3}{2}P - Q_1 = 13\text{KN}$

Thay vào (4) được: $X_C = T = 13\text{KN}$

Từ (5) ta có: $Y_C = Y_A - P_1 - Q_1 = 18 - 10 - 8 = 0$

Các kết quả tính được đều không âm, vậy chiều các phản lực liên kết giả thiết là đúng với chiều thực tế.

Ví dụ 2:

Dầm đồng chất AB trọng lượng $P_1 = 8\text{KN}$ được giữ nằm ngang nhờ bản lề trụ A và thanh chống CD.

Tác dụng lên AB ngẫu lực có mô men $M = 6\text{KNm}$.

Thanh CD đồng chất trọng lượng $P_2 = 8\text{KN}$ được ngàm vào tường ở C. Biết $AB = CD = 4\text{m}$; Xác định phản lực liên kết ở A, C và áp lực của thanh AB lên CD.

Bài giải:

Xét cân bằng dầm AB. Hệ lực tác dụng lên dầm:

$$(\vec{P}_1, \text{ng}M, \vec{N}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A) \sim 0$$

Đây là hệ lực phẳng có 3 phương trình cân bằng:

$$\sum X_k = X_A = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y_k = Y_A + N - P_1 = 0 \quad (2)$$

$$\sum \overline{m_A}(\vec{F}_k) = 2N - 2P_1 - M = 0 \quad (3)$$

Từ (3) suy ra:
$$N = P_1 + \frac{M}{2} = 11\text{KN}$$

Từ (2) ta có:
$$Y_A = -N + P_1 = -3\text{KN} < 0$$

Xét cân bằng thanh CD. Để CD cân bằng ta có: $(\vec{P}_2, \vec{N}', \vec{X}_C, \vec{Y}_C, \text{ng}M_C) \sim 0$. Trong đó \vec{N}' cùng phương, ngược chiều với \vec{N} và $N' = N = 11\text{KN}$.

$$\sum X_k = X_C = 0$$

$$\sum Y_k = Y_C - P_2 - N' = 0$$

$$\sum m_C = M_C - 2\cos 60^\circ \cdot P_2 - 4\cos 60^\circ \cdot N' = 0$$

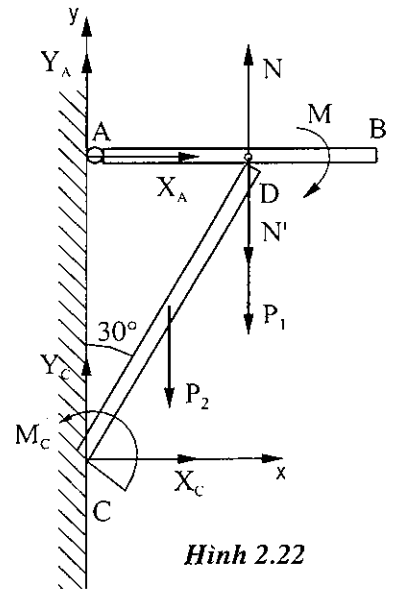
Từ (5) có:
$$Y_C = P_2 + N' = 8 + 11 = 19\text{KN}$$

Phương trình (6) cho:
$$M_C = P_2 + 2N = 8 + 22 = 30\text{KNm}$$

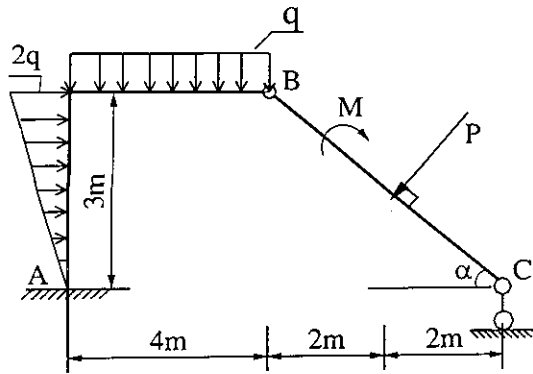
Ví dụ 3:

Cho kết cấu như hình 2.23, bỏ qua trọng lượng của các thanh. Biết $q = 1\text{KN/m}$; $P = 10\text{KN}$; $M = 7\text{KNm}$.

Tìm phản lực liên kết tại ngàm A, khớp B và gối tựa con lăn C.



Hình 2.22



Hình 2.23

Bài giải:

- Xét cân bằng BC:

Thay thế liên kết khớp B bằng hai phản lực liên kết $\overline{X}_B, \overline{Y}_B$, liên kết tại C bằng \overline{N}_C hình (2.24). Để BC cân bằng thì: $(\overline{P}, \overline{X}_B, \overline{Y}_B, \overline{N}_C, ngM) \sim 0$.

Phân tích \overline{P} , thành hai thành phần:

$$P_1 = P \sin \alpha = 10 \cdot \frac{3}{5} = 6 \text{KN}; \quad P_2 = P \cos \alpha = 10 \cdot \frac{4}{5} = 8 \text{KN}$$

Chọn hai trục tọa độ x, y như hình vẽ ta có các phương trình cân bằng:

$$\sum X_k = X_B - P_1 = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y_k = Y_B + N_C - P_2 = 0 \quad (2)$$

$$\sum m_B(\overline{F}_k) = 4N_C - 2,5P - M = 0 \quad (3)$$

Từ (1) suy ra: $X_B = P_1 = 6 \text{KN}$

Từ (3) ta có: $N_C = \frac{M + 2,5P}{4} = \frac{7 + 25}{4} = 8 \text{KN}$

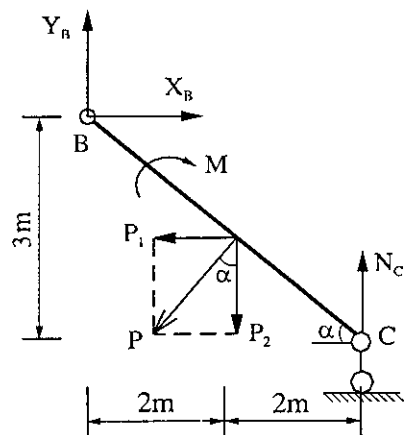
Thay vào (2) được: $Y_B = P_2 - N_C = 8 - 8 = 0$

- Xét cân bằng AB:

Thay thế tải trọng phân bố bằng các hợp lực:

$$Q_1 = \frac{2ql_1}{2} = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3 \text{KN}; \quad Q_2 = ql_2 = 1 \cdot 4 = 4 \text{KN}$$

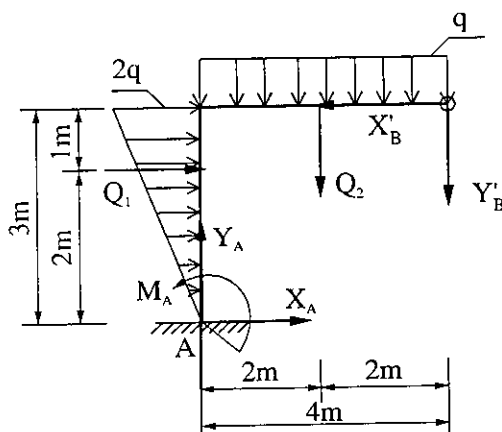
Các lực tác dụng lên AB gồm $\overline{Q}_1, \overline{Q}_2$, phản lực liên kết tại ngàm A: $\overline{X}_A, \overline{Y}_A, ngM_A$, phản lực liên kết tại B: $\overline{X}'_B = -\overline{X}_B, \overline{Y}'_B = -\overline{Y}_B$.



Hình 2.24

Để AB cân bằng thì:

$$(\overline{Q_1}, \overline{Q_2}, \overline{X_A}, \overline{Y_A}, \overline{X'_B}, \overline{Y'_B}, ngM_A) \sim 0$$



Hình 2.25

Đây là hệ lực phẳng có 3 phương trình cân bằng:

$$\sum X_k = X_A + Q_1 - X'_B = 0 \quad (4)$$

$$\sum Y_k = Y_A - Q_2 - Y'_B = 0 \quad (5)$$

$$\sum m_A(\overline{F_k}) = M_A - 2Q_1 - 2Q_2 + 3X'_B - 4Y'_B = 0 \quad (6)$$

Chú ý: $X'_B = X_B = 6\text{KN}$; $Y'_B = Y_B = 0$;

Từ (4) suy ra: $X_A = X'_B - Q_1 = 6 - 3 = 3\text{KN}$

Từ (5) ta có: $Y_A = Q_2 + Y'_B = 4\text{KN}$

Từ (6) được: $M_A = 2(Q_1 + Q_2) - 3X'_B + 4Y'_B = 2(3 + 4) - 3 \cdot 6 = -4\text{KN.m}$

5. Bài toán dàn

a) *Định nghĩa*: Dàn là hệ các thanh thẳng không trọng lượng liên kết với nhau bằng khớp ở đầu các thanh, các khớp nối gọi là các nút của dàn.

Dàn chỉ chịu tác dụng của các lực tại các nút dàn. Nếu các thanh của dàn nằm trong cùng một mặt phẳng, dàn được gọi là dàn phẳng.

Với các giả thiết trên, các thanh của dàn là liên kết thanh, phản lực liên kết hướng dọc theo các thanh, gọi là lực dọc hay ứng lực của thanh. Để xác định ứng lực của các thanh, ta có thể sử dụng phương pháp tách nút hoặc phương pháp mặt cắt.

b) *Phương pháp tách nút*:

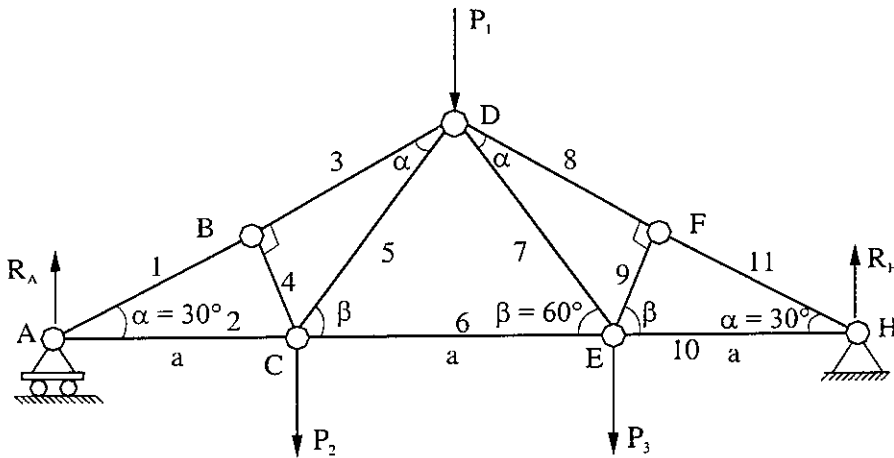
Để xác định lực dọc của các thanh bằng phương pháp tách nút ta cần tiến hành các bước sau:

- Hoá rắn toàn dàn xác định các phản lực gối tựa
- Tách nút nào có hai thanh nếu là dàn phẳng hoặc 3 thanh nếu là dàn không gian, xét cân bằng nút đó, dùng các phương trình cân bằng của hệ lực đồng quy để xác định các phản lực liên kết thanh.

- Xét cân bằng các nút lân cận có 2 phản lực liên kết thanh chưa biết, nếu là dàn phẳng, hoặc 3 phản lực liên kết thanh chưa biết, nếu là dàn không gian.

Xét lần lượt cân bằng của các nút dần sẽ xác định được tất cả các phản lực liên kết thanh của dàn.

Ví dụ 1: Cho dàn phẳng đối xứng như hình vẽ, xác định ứng lực trong các thanh. Biết $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 60^\circ$; $P_1 = 20\text{KN}$; $P_2 = P_3 = 10\text{KN}$



Hình 2.26

Bài giải:

Do tính chất đối xứng của kết cấu và tải trọng nên phản lực liên kết tại 2 gối tựa A và H bằng nhau. $R_A = R_H$, ứng lực trong các thanh đối xứng cũng bằng nhau.

$$S_1 = S_{11}; \quad S_2 = S_{10}; \quad S_3 = S_8; \quad S_5 = S_7; \quad S_4 = S_9$$

Hoá rắn xét cân bằng toàn hệ: $(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \vec{R}_A, \vec{R}_H) \sim 0$

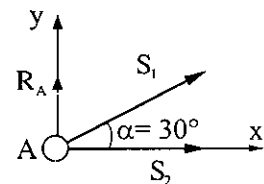
$$\Sigma Y_k = R_A + R_H - P_1 - P_2 - P_3 = 0 \quad (1)$$

Suy ra: $R_A = R_H = \frac{1}{2}(P_1 + P_2 + P_3) = 20\text{KN}$

Xét cân bằng nút A: $(\vec{R}_A, \vec{S}_1, \vec{S}_2) \sim 0$

$$\Sigma X_k = S_2 + S_1 \cos 30^\circ = 0 \quad (2)$$

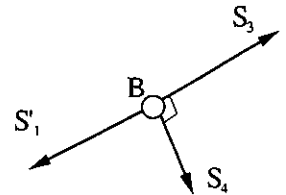
$$\Sigma Y_k = R_A + S_1 \sin 30^\circ = 0 \quad (3)$$



Hình 2.27

Từ (3) suy ra: $S_1 = \frac{-R_A}{\sin 30^0} = -20 \cdot 2 = -40\text{KN}$

Từ (2) có: $S_2 = -S_1 \cos 30^0 = 40 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3} = 34,64\text{KN}$



Hình 2.28

Xét cân bằng nút B: $(\vec{S}'_1, \vec{S}_3, \vec{S}_4) \sim 0$

Vì hai thanh 1 và 3 cùng nằm trên một đường thẳng nên nếu viết phương trình hình chiếu lên trục vuông góc với hai thanh ta được $S_4 = 0$.

Do đó: $S_3 = S'_1 = S_1 = -40\text{KN}$

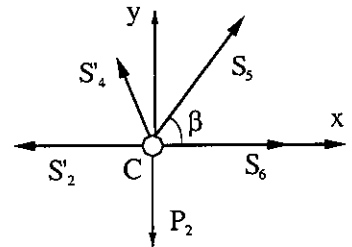
Xét cân bằng nút C: $(\vec{P}_2, \vec{S}'_2, \vec{S}'_4, \vec{S}'_5, \vec{S}'_6) \sim 0$

Trong đó: $S'_2 = S_2 = 34,64\text{KN}$; $S'_4 = S_4 = 0$

$$\sum X_k = S_6 + S_5 \cos 60^0 - S'_2 = 0 \quad (4)$$

$$\sum Y_k = S_5 \cos 30^0 - P_2 = 0 \quad (5)$$

Từ (5) suy ra: $S_5 = \frac{P_2}{\cos 30^0} = 10 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 11,55\text{KN}$



Hình 2.29

Thay vào (4) được:

$$S_6 = S'_2 - S_5 \cos 60^0 = 34,64 - 11,55 \cdot \frac{1}{2} = 28,865 \text{ KN}$$

Như vậy các thanh 1, 3 chịu nén, các thanh 2, 5, 6 chịu kéo còn thanh 4 không chịu lực tác dụng.

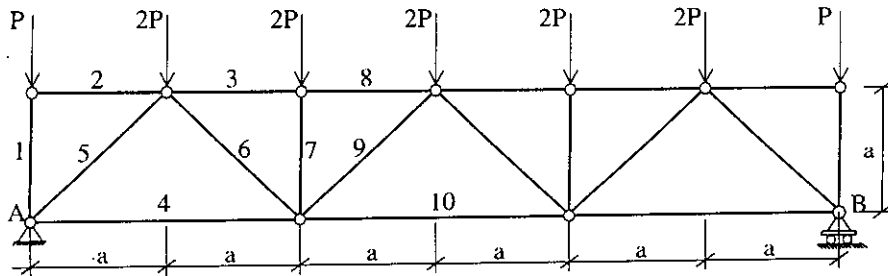
c) Phương pháp mặt cắt:

Đối với dàn phẳng, để xác định lực dọc của các thanh ta có thể sử dụng phương pháp mặt cắt theo các bước sau:

- Xét cân bằng toàn dàn, xác định các phản lực gối tựa của dàn.
- Tưởng tượng cắt dàn thành hai phần bằng một mặt cắt qua tối đa 3 thanh, thay thế các thanh bằng các phản lực liên kết thanh.
- Lập các phương trình cân bằng của nửa dàn sao cho trong mỗi phương trình cân bằng chỉ có một ẩn số. Muốn vậy, viết phương trình cân bằng mômen đối với giao điểm đường tác dụng của hai phản lực thanh chưa biết. Nếu có hai thanh song song thì lập phương trình hình chiếu lên trục vuông góc với hai thanh này.

Ưu điểm của phương pháp mặt cắt là có thể xác định được lực dọc trong một thanh bất kì mà không cần biết ứng lực trong các thanh khác.

Ví dụ 2: Xác định ứng lực trong các thanh của dàn như hình 2.30.



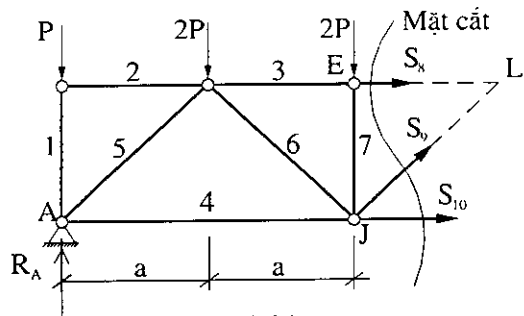
Hình 2.30

Bài giải:

Do tính chất đối xứng của kết cấu và tải trọng nên phản lực liên kết ở hai gối tựa A, B bằng nhau. $R_A = R_B = \frac{12P}{2} = 6P$;

Ứng lực trong các thanh đối xứng cũng bằng nhau.

Để xác định ứng lực trong các thanh 8, 9, 10 ta tưởng tượng cắt dần bằng mặt cắt qua 3 thanh 8, 9, 10 và thay thế các thanh này bằng các phản lực liên kết thanh \overline{S}_8 , \overline{S}_9 , \overline{S}_{10} như hình 2.31.



Hình 2.31

Chú ý \vec{S}_9, \vec{S}_{10} qua điểm J, còn \vec{S}_8, \vec{S}_9 qua điểm L.

Xét cân bằng phần bên trái dàn, viết phương trình mômen với điểm J và L:

$$\sum \overline{m}_J = -R_A \cdot 2a + P \cdot 2a + 2P \cdot a - S_8 \cdot a = 0,$$

Suy ra: $S_8 = -8P$.

$$\sum \overline{m}_L = P \cdot 3a - R_A \cdot 3a + 2P \cdot 2a + 2P \cdot a + S_{10} \cdot a = 0,$$

Suy ra: $S_{10} = 9P$.

Để xác định S_9 ta nhận thấy hai thanh 8 và 10 song song với nhau, ta viết phương trình hình chiếu lên trục Y vuông góc với hai thanh đó:

$$\sum Y_k = R_A - 2P - 2P - P + S_9 \cos 45^\circ = 0$$

$$\text{Suy ra: } S_9 = -\frac{2P}{\sqrt{2}}$$

Như vậy các thanh 8, 9 chịu nén còn thanh 10 chịu kéo.

Làm tương tự ta có thể xác định được ứng lực của tất các thanh.

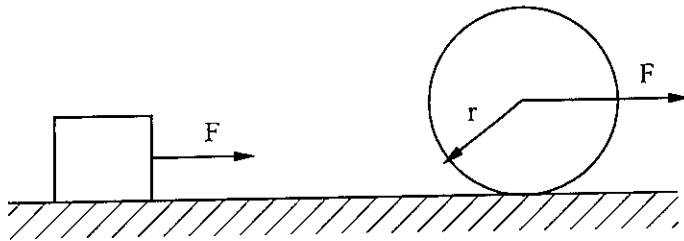
Chương III

MA SÁT

3.1. MỞ ĐẦU

Trong Chương I khi nghiên cứu phản lực liên kết mặt tựa, để đơn giản ta đã giả thiết rằng mặt tiếp xúc giữa vật khảo sát và mặt tựa là hoàn toàn trơn và rắn, do đó chúng chỉ tiếp xúc nhau ở một điểm và tại đó phản lực liên kết hướng theo pháp tuyến của mặt tựa.

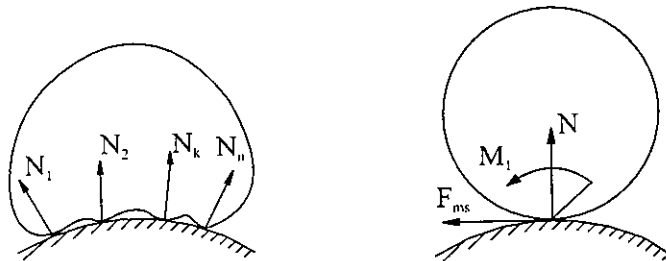
Với mô hình đó ta giải quyết được nhiều bài toán thực tế. Tuy nhiên trong một số bài toán khác, mô hình đó tỏ ra bất lực. Ví dụ với mô hình đó ta không thể giải thích tại sao lại cần một lực kéo khá lớn mới kéo được vật nặng trượt trên mặt phẳng ngang, hoặc mới đẩy được xe lăn bánh trên đường thẳng ngang.



Hình 3.1

Để có cơ sở giải quyết những bài toán đó ta phải nghiên cứu bổ sung mô hình phản lực liên kết của mặt tựa.

Trong thực tế do bề mặt tiếp xúc giữa hai vật không hoàn toàn trơn nhẵn và không hoàn toàn rắn, nên chúng tiếp xúc với nhau ở một số điểm. Ở mỗi điểm mặt tựa tác dụng lên vật một phản lực liên kết. Thu hệ lực này về một tâm ta được một lực và ngẫu lực.



Hình 3.2

Phân tích lực theo hai phương pháp tuyến và tiếp tuyến với mặt tựa tại điểm tiếp xúc: thành phần pháp tuyến \vec{N} ngăn cản dịch chuyển của vật theo phương pháp tuyến, thành phần tiếp tuyến \vec{F}_{ms} ngăn cản dịch chuyển của vật theo phương tiếp tuyến gọi là lực ma sát trượt, còn ngẫu M_t ngăn cản chuyển động lăn của vật gọi là ngẫu cản lăn.

1. Định nghĩa

Hiện tượng cản chuyển động hay xu hướng chuyển động của vật thể này trên bề mặt vật thể khác gọi là hiện tượng ma sát.

2. Phân loại ma sát

Người ta thường phân ma sát thành các loại:

- Ma sát trượt và ma sát lăn, tùy theo dịch chuyển trượt hay dịch chuyển lăn của vật bị ngăn cản.

- Ma sát khô và ma sát ướt, tùy theo hai vật tiếp xúc trực tiếp với nhau hay tiếp xúc với nhau qua một lớp dầu nhờn.

- Ma sát tĩnh và ma sát động, tùy theo vật đứng yên hay chuyển động so với mặt tựa.

Trong chương này chúng ta chỉ nghiên cứu ma sát trượt và ma sát lăn trong trường hợp tĩnh và khô, khảo sát tính chất của lực ma sát, ngẫu lực ma sát và điều kiện cân bằng của một vật khi có ma sát.

3.2. MA SÁT TRƯỢT

1. Định nghĩa

Ma sát trượt là hiện tượng cản xu hướng trượt hay chuyển động trượt của vật thể này lên bề mặt vật thể khác.

2. Định luật Culông

Bằng thực nghiệm Culông đã phát hiện ra những tính chất sau đây của ma sát trượt:

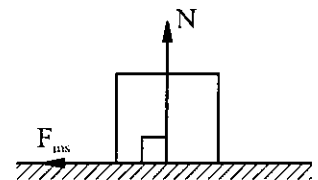
- Trong trường hợp có ma sát trượt, ở chỗ tiếp xúc giữa vật và mặt tựa, ngoài phản lực pháp tuyến mặt tựa còn tác dụng lên vật phản lực tiếp tuyến hướng ngược với xu hướng chuyển động của vật gọi là lực ma sát trượt \vec{F}_{ms} .

- Lực ma sát trượt là lực có giới hạn:

$$0 \leq F_{ms} \leq F_{max} \quad (3.1)$$

- Lực ma sát trượt cực đại tỷ lệ với phản lực tiếp tuyến N:

$$F_{max} = fN \quad (3.2)$$



Hình 3-3

Hệ số tỷ lệ f gọi là hệ số ma sát trượt.

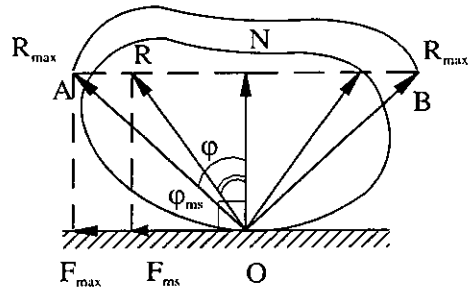
- Hệ số ma sát trượt không phụ thuộc vào diện tích tiếp xúc giữa hai vật, mà chỉ phụ thuộc vào bản chất của vật (đồng, chì...) và trạng thái bề mặt của vật (nhám, nhẵn).

3. Góc ma sát

Trong trường hợp có ma sát trượt, phản lực liên kết mặt tựa gồm hai thành phần, hợp hai thành phần này ta được phản lực toàn phần:

$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_{ms}$$

Khi lực ma sát trượt đạt giá trị cực đại thì phản lực toàn phần cũng đạt giá trị cực đại \vec{R}_{max} .



Hình 3-4

Định nghĩa: Góc lập giữa \vec{R}_{max} và pháp tuyến mặt tựa tại điểm tiếp xúc gọi là góc ma sát kí hiệu là: φ_{ms} .

Góc ma sát có các tính chất sau:

$$\operatorname{tg}\varphi_{ms} = \frac{F_{max}}{N} = \frac{fN}{N} = f$$

Khi vật còn ở trạng thái cân bằng thì phản lực toàn phần \vec{R} còn nằm trong góc ma sát. Khi vật sắp trượt, ta nói vật ở trạng thái cân bằng giới hạn thì \vec{R} nằm trên biên của góc ma sát. Miền AOB gọi là miền cân bằng của vật.

4. Điều kiện cân bằng của vật khi có ma sát trượt

Để cho vật cân bằng, hệ lực tác dụng lên vật trong đó có lực ma sát trượt phải cân bằng. Ngoài ra, vì lực ma sát trượt là lực có giới hạn nên nó phải thoả mãn điều kiện:

$$F_{ms} \leq fN \quad (3.3)$$

Khi vật sắp trượt (vật ở trạng thái cân bằng giới hạn):

$$F_{ms} = fN = F_{max}$$

Nếu gọi φ là góc lập bởi phản lực toàn phần \vec{R} và \vec{N} ta có:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{F_{ms}}{N} \leq \frac{F_{max}}{N} = \operatorname{tg}\varphi_{ms} \text{ hay } \varphi \leq \varphi_{ms}$$

Vì vậy, điều kiện (3.3) bên trên ràng buộc lực ma sát trượt có thể thay bằng điều kiện:

$$\varphi \leq \varphi_{ms} \quad (3.3)'$$

Ví dụ 1: Thanh AB đồng chất đầu A tựa lên tường nhẵn, đầu B tựa lên nền ngang nhám có hệ số ma sát trượt f . Tìm góc α lập giữa AB và nền để thanh không bị trượt.

Bài giải:

Xét cân bằng thanh AB. Các lực tác dụng lên AB gồm trọng lượng P của thanh đặt tại giữa thanh, phản lực pháp tuyến của tường $\overline{N_A}$, phản lực liên kết của nền gồm phản lực pháp tuyến $\overline{N_B}$, lực ma sát $\overline{F_{ms}}$ hướng ngược với xu hướng trượt của B. Để cho AB cân bằng thì $(\vec{P}, \vec{N_A}, \vec{N_B}, \vec{F_{ms}}) \sim 0$.

Hệ lực phẳng có 3 phương trình cân bằng:

$$\sum X_k = N_A - F_{ms} = 0 \tag{1}$$

$$\sum Y_k = N_B - P = 0 \tag{2}$$

$$\sum m_B(\vec{F}_k) = P \cdot \frac{AB}{2} \cos \alpha - N_A \cdot AB \sin \alpha = 0 \tag{3}$$

Ngoài ra lực ma sát trượt phải thỏa mãn điều kiện:

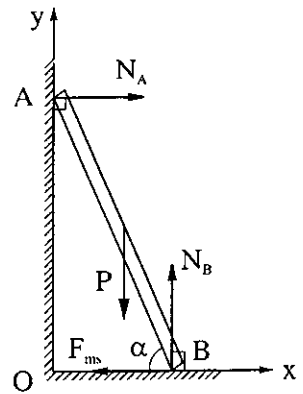
$$F_{ms} \leq f N_B \tag{4}$$

Từ (3) ta có: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{P}{2N_A}$ (5)

Chú ý đến (1), (2) ta có: $P = N_B$; $N_A = F_{ms}$

Thay vào (5) và sử dụng (4) ta có: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{N_B}{2F_{ms}} \geq \frac{1}{2f}$

Vì $\alpha < 90^\circ$ nên để cho AB cân bằng thì $\alpha \geq \arctg \frac{1}{2f}$



Hình 3.5

Ví dụ 2:

Tang quay B hai bậc có bán kính R, r, trọng lượng Q, có thể quay quanh trục nằm ngang qua O. Tang B được giữ bởi hai thanh không trọng lượng OC, OD (hình 3.6).

OC nằm ngang, OD làm với phương thẳng đứng góc β . Một vật trọng lượng P được buộc vào dây cuốn quanh tang. Để giữ cho tang đứng yên, tác dụng vào cần hãm không trọng lượng O₁A lực F tạo với phương ngang góc α . Bỏ qua kích thước má hãm, biết O₁E = a, EA = b, hệ số ma sát trượt giữa má hãm và tang là f. Tìm lực \overline{F} nhỏ nhất để hãm được cơ cấu. Xác định ứng lực trong hai thanh OC, OD.

Bài giải:

- Xét cân bằng đòn phẳng O₁A:

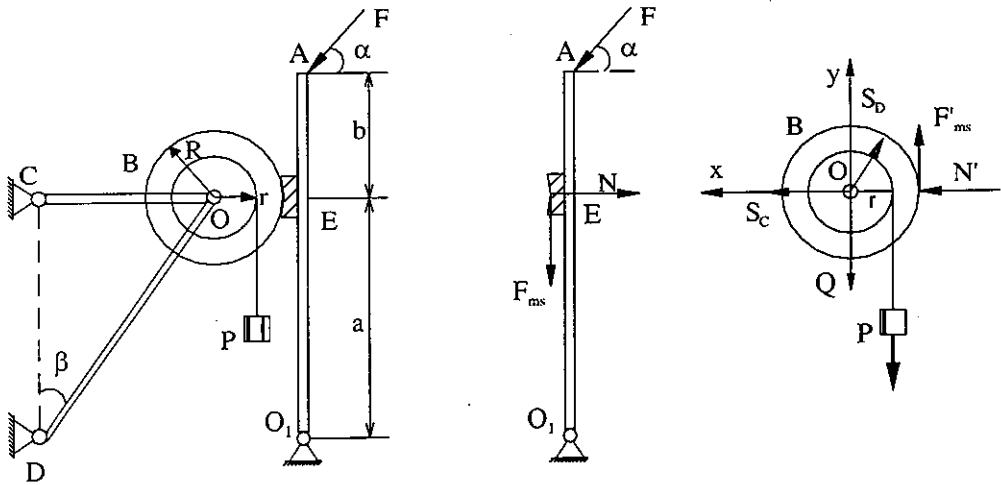
O₁A chịu tác dụng của các lực $\overline{F}, \overline{N}, \overline{F_{ms}}$.

Điều kiện cân bằng của đòn phẳng: $\sum m_{O_1} = (a + b)F \cos \alpha - aN = 0$

Suy ra:
$$F = \frac{a}{(a + b) \cos \alpha} N \tag{1}$$

- Xét trạng thái cân bằng giới hạn của tang tời B (khi sắp bị trượt):

Các lực tác dụng lên tang gồm \vec{P} , \vec{Q} , các phản lực liên kết thành $\vec{S}_C, \vec{S}_D, \vec{N}' = -\vec{N}, \vec{F}'_{ms} = -\vec{F}_{ms}$. Để tang B cân bằng thì: $(\vec{P}, \vec{Q}, \vec{S}_C, \vec{S}_D, \vec{N}', \vec{F}'_{ms}) \sim 0$.



Hình 3.6

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ ta có các phương trình cân bằng:

$$\sum X_k = N' + S_C - S_D \sin \beta = 0 \quad (2)$$

$$\sum Y_k = S_D \cos \beta + F'_{ms} - Q - P = 0 \quad (3)$$

$$\sum \overline{m}_O = F'_{ms} \cdot R - Pr = 0 \quad (4)$$

Khi sắp trượt $F'_{ms} = fN'$ nên từ (4) ta có: $N' = \frac{r}{fR} P = N$

Thay vào (1) được:

$$F_{\min} = \frac{arP}{(a+b)fR \cos \alpha}$$

Từ (3) có:

$$S_D = \frac{1}{\cos \beta} (P + Q - fN) = \frac{P(R-r) + QR}{R \cos \beta}$$

Từ (2) tìm được:

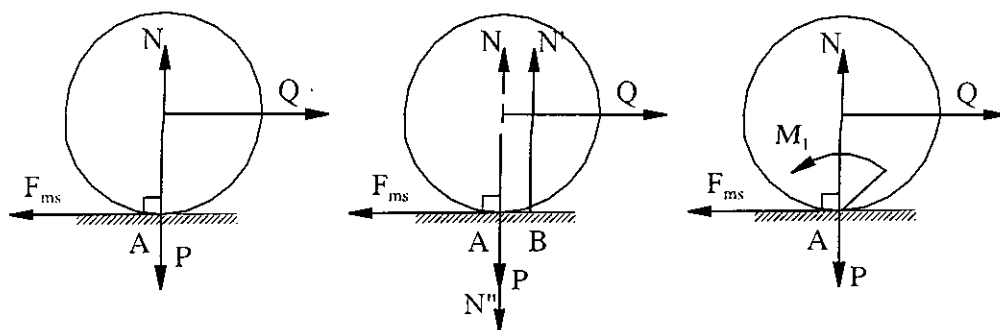
$$S_C = S_D \sin \beta - N' = \frac{P(R-r) + QR}{R} \operatorname{tg} \beta - \frac{r}{fR} P$$

3.3. MA SÁT LĂN

1. Định nghĩa

Ma sát lăn là hiện tượng cản xu hướng lăn hay chuyển động lăn của vật thể này trên bề mặt vật thể khác.

2. Các tính chất



Hình 3.7

Khảo sát một bánh xe bán kính R , trọng lượng P nằm yên trên nền ngang nhám. Tác dụng vào trục bánh xe lực \vec{Q} nằm ngang. Ở điểm A sẽ xuất hiện lực ma sát trượt ngăn cản chuyển động trượt của bánh xe trên nền. Nếu phản lực pháp tuyến \vec{N}' của nền cũng đặt tại A thì bánh xe sẽ bị lăn do tác dụng của ngẫu lực tạo bởi lực \vec{Q} và lực ma sát \vec{F}_{ms} dù cho \vec{Q} rất nhỏ.

Thực tế không phải như vậy. Phản lực \vec{N}' không phải đặt tại A mà tại điểm B ngay cạnh A và cùng với lực \vec{P} tạo thành ngẫu lực cản chuyển động lăn của bánh xe. Nếu đặt tại A cặp lực cân bằng $\vec{N} = -\vec{N}' = \vec{N}'$ thì hệ phản lực tác dụng lên vật $(\vec{F}_{ms}, \vec{N}') \sim (\vec{N}, \vec{F}_{ms}, \text{ng}(\vec{N}', \vec{N}''))$. Ngẫu (\vec{N}', \vec{N}'') cản chuyển động lăn của bánh xe, gọi là ngẫu lực cản lăn, kí hiệu là M_l .

Như vậy trong trường hợp có ma sát lăn, phản lực liên kết của mặt tựa gồm 3 thành phần: phản lực pháp tuyến \vec{N} , lực ma sát trượt \vec{F}_{ms} , và ngẫu lực cản lăn M_l hướng ngược với xu hướng lăn của vật.

Mô men của ngẫu lực cản lăn tăng lên theo sự tăng của Q , giá trị lớn nhất của nó đạt được khi bánh xe bắt đầu lăn. Bằng thực nghiệm người ta xác định được:

$$M_{\max} = kN \quad (3.4)$$

Hệ số tỷ lệ k gọi là hệ số ma sát lăn, đơn vị m , không phụ thuộc vào diện tích tiếp xúc giữa hai vật mà phụ thuộc vào bản chất của vật. Thông thường $k \ll f$ nên người ta thường bỏ qua ma sát lăn.

3. Điều kiện cân bằng của vật khi có ma sát lăn

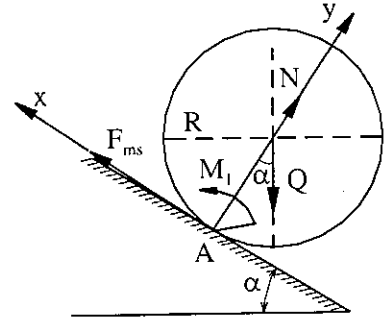
Trong trường hợp có ma sát lăn, để cho vật cân bằng thì hệ lực tác dụng lên vật, trong đó có lực ma sát trượt, ngẫu cản lăn, phải cân bằng. Ngoài ra lực ma sát trượt và ngẫu cản lăn phải thoả mãn các điều kiện:

$$0 \leq F_{ms} \leq fN; \quad M_l \leq kN \quad (3.5)$$

Ví dụ: Trụ tròn đồng chất trọng lượng Q , bán kính R nằm trên mặt phẳng nghiêng một góc α với mặt phẳng ngang. Biết hệ số ma sát trượt và ma sát lăn của trụ và mặt nghiêng lần lượt là f, k . Tìm góc α để trụ cân bằng trên mặt nghiêng (hình 3.8).

Bài giải:

Xét cân bằng trụ. Các lực tác dụng lên trụ gồm trọng lượng Q đặt ở trọng tâm O , phản lực pháp tuyến \vec{N} , lực ma sát trượt \vec{F}_{ms} , ngẫu cản lăn M_l .



Hình 3-8

Để trụ cân bằng thì: $(\vec{Q}, \vec{N}, \vec{F}_{ms}, ngM_l) \sim 0$.

Đây là hệ lực phẳng có 3 phương trình cân bằng:

$$\sum X_k = F_{ms} - Q \sin \alpha = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y_k = N - Q \cos \alpha = 0 \quad (2)$$

$$\sum \overline{m_A}(\vec{F}_k) = M_l - QR \sin \alpha = 0 \quad (3)$$

Ngoài ra: $F_{ms} \leq fN \quad (4)$

$$M_l \leq kN \quad (5)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_{ms}}{N} \leq f$ theo (4)

Từ (1) và (3) ta có: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{M_l}{RN} \leq \frac{k}{R}$ theo (5)

Vì $\frac{k}{R}$ rất nhỏ so với f nên để trụ cân bằng (không lăn, không trượt) thì $\operatorname{tg} \alpha \leq \frac{k}{R}$

Nếu $\frac{k}{R} < \operatorname{tg} \alpha \leq f$ trụ lăn không trượt.

Chương IV

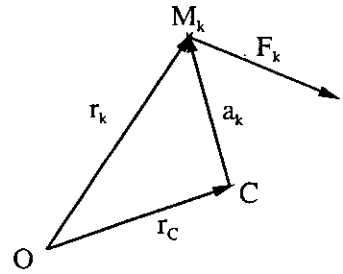
TRỌNG TÂM

4.1. TÂM CỦA HỆ LỰC SONG SONG

Định lý:

Trong trường hợp hệ lực song song có hợp lực, nếu giữ nguyên điểm đặt, cường độ và quan hệ song song của các lực, mà chỉ thay đổi phương chung của chúng một cách tùy ý thì hợp lực của hệ lực luôn đi qua điểm C cố định có véc tơ bán kính định vị:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^n \vec{F}_k \vec{r}_k}{\sum_{k=1}^n \vec{F}_k} \quad (4.1)$$



Hình 4-1

Trong đó: \vec{F}_k là hình chiếu của \vec{F}_k lên phương chung của hệ.

Điểm C đó gọi là tâm của hệ lực song song.

Chứng minh:

Cho hệ lực song song $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$. Giả sử \vec{F}_k có điểm đặt M_k được xác định bằng véc tơ bán kính định vị \vec{r}_k . Ta sẽ chứng minh rằng hợp lực \vec{R} của hệ luôn đi qua điểm C. Thật vậy, vì hệ lực có hợp lực nên theo định lý Varignon:

$$\vec{m}_C(\vec{R}) = \sum_{k=1}^n \vec{m}_C(\vec{F}_k) \quad (1)$$

Gọi \vec{i} là véc tơ đơn vị trên trục Δ song song với các lực và \vec{F}_k là hình chiếu lên trục Δ của \vec{F}_k ta có:

$$\vec{F}_k = \vec{F}_k \vec{i}; \quad \vec{R} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \vec{i}$$

Từ hình vẽ ta có:

$$\sum_{k=1}^n \vec{m}_C(\vec{F}_k) = \sum_{k=1}^n \vec{a}_k \times \vec{F}_k = \sum_{k=1}^n (\vec{r}_k - \vec{r}_C) \times \vec{F}_k = \sum_{k=1}^n (\vec{r}_k \times \vec{F}_k) - \vec{r}_C \times \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \quad (2)$$

Theo (4.1):
$$\vec{r}_C \times \sum_{k=1}^n \vec{F}_k = \frac{\sum_{k=1}^n \vec{F}_k \vec{r}_k}{\sum_{k=1}^n \vec{F}_k} \times \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \vec{i} = \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \vec{F}_k; \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1) ta có:
$$\vec{m}_c(\vec{R}) = \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \vec{F}_k - \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \vec{F}_k = 0$$

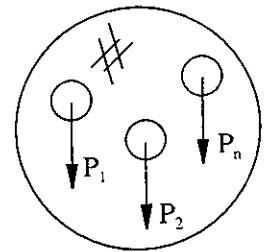
Vì vậy hợp lực \vec{R} của hệ luôn đi qua điểm C được xác định bằng công thức (4.1).
Chiếu (4.1) lên 3 trục tọa độ Đề-Các vuông góc ta được tọa độ điểm C:

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n \vec{F}_k x_k}{\sum_{k=1}^n \vec{F}_k}; \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^n \vec{F}_k y_k}{\sum_{k=1}^n \vec{F}_k}; \quad z_C = \frac{\sum_{k=1}^n \vec{F}_k z_k}{\sum_{k=1}^n \vec{F}_k} \quad (4.1)'$$

4.2. TRỌNG TÂM CỦA VẬT RẮN

1. Định nghĩa và công thức xác định trọng tâm vật rắn

Cho vật (S) ở gần trái đất. Chia vật (S) thành n phần tử đủ nhỏ. Gọi các phần tử đó là M_1, M_2, \dots, M_n . Các phần tử này bị trái đất hút với các lực lần lượt là: $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n$. Vì vật (S) ở rất xa tâm trái đất. Nên có thể xem hệ lực $(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n)$ là hệ lực song song cùng chiều và do đó có hợp lực là \vec{P} .



Hình 4.2

Hệ lực này có tính chất đặc biệt là: Nếu thay đổi vị trí của vật thì các lực vẫn giữ nguyên cường độ, vẫn song song cùng chiều và vẫn đặt tại các điểm M_1, M_2, \dots, M_n thuộc vật (S). Do đó theo định lý trên hợp lực \vec{P} của hệ luôn đi qua điểm G cố định. Gọi G là trọng tâm gần đúng của vật rắn. Theo (4.1) công thức xác định trọng tâm gần đúng của vật rắn là:

$$\vec{r}_G = \frac{\sum_{k=1}^n P_k \vec{r}_k}{\sum_{k=1}^n P_k} = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^n P_k \vec{r}_k \quad (4.2)$$

Chiếu (4.2) lên các trục tọa độ ta được công thức xác định tọa độ trọng tâm gần đúng của vật rắn:

$$x_G = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^n P_k x_k; \quad y_G = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^n P_k y_k; \quad z_G = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^n P_k z_k \quad (4.2)'$$

Nếu chia vật thể ngày càng nhỏ, trọng tâm gần đúng của vật rắn sẽ dẫn tới một điểm xác định. Gọi điểm đó là trọng tâm của vật rắn. Cho công thức (4.2) qua giới hạn khi số phần tử chia n ra vô cùng và P_k tiến tới không ta được công thức xác định trọng tâm vật rắn:

$$\vec{r}_G = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ P_k \rightarrow 0}} \frac{1}{P} \sum_{k=1}^n P_k \vec{r}_k = \frac{1}{P} \int_{(P)} \vec{r} dP \quad (4.3)$$

Chiếu (4.3) lên các trục tọa độ ta được công thức xác định tọa độ trọng tâm của vật rắn:

$$x_G = \frac{1}{P} \int_{(P)} x dP; \quad y_G = \frac{1}{P} \int_{(P)} y dP; \quad z_G = \frac{1}{P} \int_{(P)} z dP \quad (4.3)'$$

Trong trường hợp vật rắn đồng chất các công thức xác định trọng tâm (4.2), (4.3) có dạng như sau:

- Nếu vật rắn là đường đồng chất dài L, gọi γ là trọng lượng riêng, s là độ dài ta có: $dP = \gamma ds$; $P = \gamma L$.

Do đó:
$$\vec{r}_G = \frac{1}{L} \int_L \vec{r} ds \quad (4.4)$$

$$x_G = \frac{1}{L} \int_L x ds; \quad y_G = \frac{1}{L} \int_L y ds; \quad z_G = \frac{1}{L} \int_L z ds \quad (4.4)'$$

- Nếu vật rắn là mặt đồng chất có diện tích S ta có: $P = \gamma S$; $dP = \gamma dS$.

Tương tự ta có:
$$\vec{r}_G = \frac{1}{S} \int_{(S)} \vec{r} dS \quad (4.5)$$

Chiếu (4.5) lên các trục tọa độ ta được công thức xác định tọa độ trọng tâm của vật rắn:

$$x_G = \frac{1}{S} \int_{(S)} x dS; \quad y_G = \frac{1}{S} \int_{(S)} y dS; \quad z_G = \frac{1}{S} \int_{(S)} z dS \quad (4.5)'$$

- Nếu vật rắn là vật đồng chất có thể tích V ta có: $P = \gamma V$; $dP = \gamma dV$;

Tương tự ta có:
$$\vec{r}_G = \frac{1}{V} \int_{(V)} \vec{r} dV \quad (4.6)$$

Chiếu (4.6) lên các trục tọa độ ta được công thức xác định tọa độ trọng tâm của vật rắn:

$$x_G = \frac{1}{V} \int_{(V)} x dV; \quad y_G = \frac{1}{V} \int_{(V)} y dV; \quad z_G = \frac{1}{V} \int_{(V)} z dV \quad (4.6)'$$

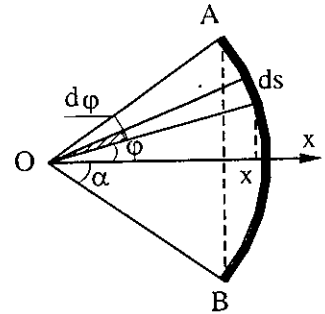
Ví dụ: Xác định trọng tâm của cung tròn đồng chất.

Xét cung tròn đồng chất AB có bán kính R, góc ở tâm $\widehat{AOB} = 2\alpha$. Do tính chất đối xứng, trọng tâm của AB nằm trên trục x. Vì vậy ta chỉ cần tính x_G . Lấy một cung phân tố có độ dài $ds = R d\varphi$ trên AB, tọa độ x của nó là $x = R \cos\varphi$. Độ dài cung AB là $L = 2R\alpha$. Thay các giá trị này vào (4.4)' ta có:

$$x_G = \frac{1}{L_{AB}} \int x ds = \frac{1}{2R\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} R \cos\varphi \cdot R d\varphi = R \frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

Nếu cung AB là nửa đường tròn $\alpha = \frac{\pi}{2}$; $\sin\alpha = 1$, ta có:

$$x_G = \frac{2R}{\pi}$$



Hình 4-3

2. Các phương pháp xác định trọng tâm vật rắn

Để xác định trọng tâm của vật rắn ta phải dùng các công thức (4.2),..., (4.3)'. Tuy nhiên nếu dựa vào các tính chất đặc biệt của vật rắn và với cách chọn hệ tọa độ hợp lý có thể nhanh chóng xác định được trọng tâm vật rắn.

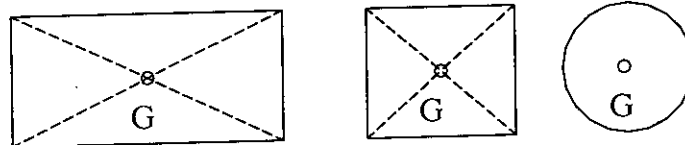
a) Vật đồng chất đối xứng

Định lý 1: Nếu vật đồng chất có tâm, trục hay mặt phẳng đối xứng thì trọng tâm của vật nằm ngay trên tâm, trục hay mặt phẳng đối xứng đó.

Chứng minh: ta chứng minh cho trường hợp vật đồng chất có tâm đối xứng. Chia vật thành từng cặp phần tử đối xứng nhau qua tâm đối xứng O và có trọng lượng bằng nhau $P'_k = P_k$, $\vec{r}'_k = -\vec{r}_k$ do đó theo (4.2):

$$\vec{r}_G = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^n P_k (\vec{r}_k + \vec{r}'_k) = 0. \text{ Vậy } G \text{ trùng với } O$$

Nếu vật có trục hay mặt phẳng đối xứng, ta chia vật thành từng cặp phần tử đối xứng nhau qua trục hay mặt đó, chọn trục hay mặt đó làm các trục hay mặt phẳng tọa độ, dùng các công thức xác định tọa độ trọng tâm sẽ chứng minh được trọng tâm của vật nằm trên trục hay mặt đó.



Hình 4.4

Hệ quả:

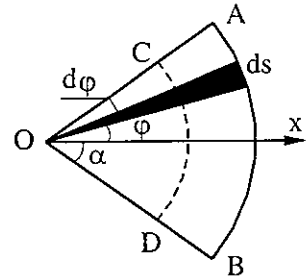
- Nếu vật rắn đồng chất có nhiều trục đối xứng thì trọng tâm của vật nằm ở giao điểm các trục đối xứng đó.

- Nếu vật rắn đồng chất có nhiều mặt phẳng đối xứng thì trọng tâm của vật nằm trên đường giao của các mặt phẳng đối xứng đó.

Ví dụ 1: Các tấm chữ nhật, hình vuông, hình tròn đồng chất có trọng tâm trùng với tâm đối xứng hình học, tương tự các khối hộp chữ nhật, khối lập phương, khối cầu đồng chất cũng có trọng tâm trùng với tâm đối xứng hình học của chúng.

Ví dụ 2: Xác định trọng tâm của hình quạt tròn đồng chất.

Xét hình quạt tròn đồng chất \widehat{OAB} có bán kính R , góc ở tâm 2α . Chia hình quạt thành các hình quạt nhỏ, mỗi hình quạt nhỏ có thể coi là một tam giác có trọng tâm nằm cách O một đoạn $\frac{2}{3}R$. Như vậy trọng tâm của tất cả các hình quạt nhỏ nằm trên cung tròn CD có bán kính $\frac{2}{3}R$.



Hình 4-5

Áp dụng kết quả của ví dụ tìm trọng tâm cung tròn đồng chất ta xác định được trọng tâm của hình quạt tròn: $x_G = \frac{2}{3}R \frac{\sin \alpha}{\alpha}$.

Nếu hình quạt tròn là nửa tấm tròn có: $\alpha = \frac{\pi}{2}$ thì $\sin \alpha = 1$ ta có: $x_G = \frac{4R}{3\pi}$.

b) Vật ghép

Định lý 2: Nếu trọng tâm của các phần tử cùng nằm trên một trục hay mặt phẳng thì trọng tâm của vật cũng nằm trên trục hay mặt phẳng đó.

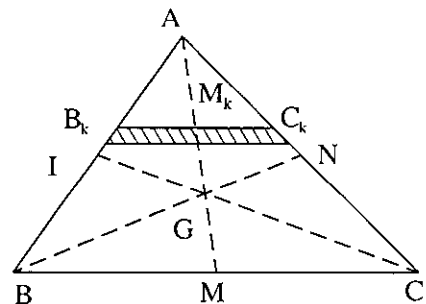
Chứng minh: Thật vậy, giả sử trọng tâm của các phần tử cùng nằm trên trục x của hệ toạ độ Đề Các vuông góc $oxyz$, khi đó gọi toạ độ trọng tâm của phần tử thứ k là (x_k, y_k, z_k) ta có $y_k = z_k = 0$ do đó theo (4.2)':

$$y_G = \frac{1}{P} \sum P_k \cdot y_k = 0; \quad z_G = \frac{1}{P} \sum P_k \cdot z_k = 0$$

Vậy trọng tâm G của vật nằm trên trục x .

Ví dụ 1: Xác định trọng tâm của tấm tam giác ABC đồng chất.

Chia tấm thành những dải hẹp $B_k C_k$ song song với đáy BC . Trọng tâm của $B_k C_k$ nằm tại điểm giữa M_k của nó, theo định lý 2, trọng tâm của tam giác ABC nằm trên trung tuyến AM . Lập luận tương tự ta có trọng tâm của nó nằm trên trung tuyến BN .



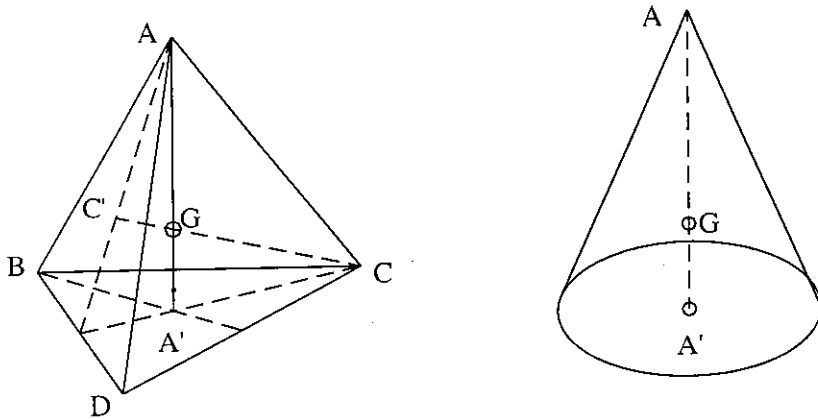
Hình 4-6

Vậy trọng tâm của tam giác đồng chất nằm trên giao điểm của các đường trung tuyến của tam giác:

$$\frac{GM}{AM} = \frac{GN}{BN} = \frac{GI}{CI} = \frac{1}{3}$$

Bằng phương pháp tương tự có thể xác định trọng tâm của tứ diện đồng chất ABCD là giao điểm của các đường AA', BB', CC', DD'. Trong đó A', B', C', D' lần lượt là trọng tâm của các tam giác đáy và mặt bên. Dễ dàng suy ra:

$$\frac{GA'}{AA'} = \frac{GB'}{BB'} = \frac{GC'}{CC'} = \frac{GD'}{DD'} = \frac{1}{4}$$



Hình 4.7

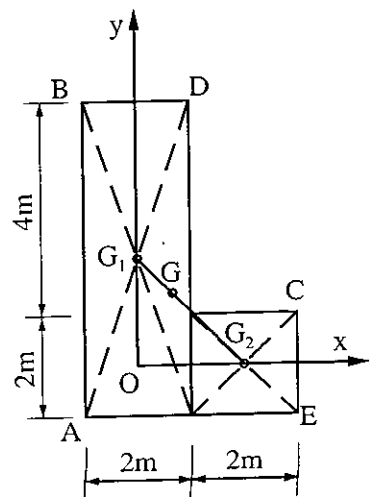
Nếu coi hình nón là giới hạn của đa diện khi số cạnh đáy tăng lên vô hạn thì từ công thức trên ta có thể suy ra công thức xác định trọng tâm của hình nón là:

$$\frac{GA'}{AA'} = \frac{1}{4} \text{ trong đó } A' \text{ là trọng tâm của đáy nón.}$$

Nếu vật rắn phẳng đồng chất có diện tích S được ghép từ n phần có diện tích S_k , tọa độ trọng tâm (x_k, y_k) thì từ công thức (4.2)' ta có công thức xác định tọa độ trọng tâm của vật:

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{S} \sum_{k=1}^n S_k x_k \\ y_G &= \frac{1}{S} \sum_{k=1}^n S_k y_k \end{aligned} \quad (4.7)$$

Ví dụ 2: Xác định trọng tâm của tấm thép đồng chất hình chữ L có kích thước như hình 4.8.



Hình 4.8

Bài giải:

Chia tấm thép thành một tấm chữ nhật và một tấm hình vuông như hình vẽ. Trọng tâm G_1, G_2 của hai tấm đều ở giao điểm hai đường chéo. Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ ta có:

$$x_1 = 0; x_2 = 2m; y_1 = 2m; y_2 = 0; S_1 = 12m^2; S_2 = 4m^2.$$
$$S = S_1 + S_2 = 16m^2$$

Theo (4.7):
$$x_G = \frac{1}{S}(S_1x_1 + S_2x_2) = \frac{1}{16}(0 + 8) = \frac{1}{2}m$$

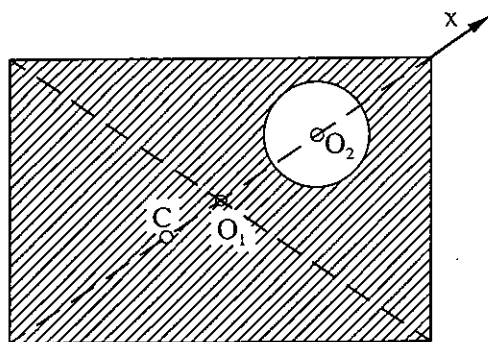
$$y_G = \frac{1}{S}(S_1y_1 + S_2y_2) = \frac{1}{16}(24 + 0) = \frac{3}{2}m$$

c) Vật khuyết

Để xác định trọng tâm của vật bị khuyết một phần nào đó ta áp dụng phương pháp phân chia coi vật là hợp của hai phần: vật đầy với trọng lượng (diện tích) dương và vật khuyết với trọng lượng (diện tích) âm. Sau đó sử dụng công thức (4.7) để tìm trọng tâm.

Ví dụ: Xác định trọng tâm của tấm thép đồng chất hình vuông cạnh a sau khi cắt bỏ đi một tấm tròn bán kính r , tâm nằm trên đường chéo hình vuông như hình vẽ biết $O_1O_2 = h$.

Coi tấm là hợp của tấm hình vuông đầy có diện tích dương và tấm tròn với diện tích âm. Trọng tâm của chúng lần lượt là O_1, O_2 do đó trọng tâm của tấm khuyết nằm trên trục x qua O_1, O_2 gọi tọa độ, trọng lượng, diện tích của 2



Hình 4.9

phần lần lượt là $x_1, x_2, P_1, P_2, S_1, S_2$ và γ là trọng lượng riêng của tấm trên một đơn vị diện tích ta có:

$$x_1 = 0; x_2 = h; S_1 = \gamma a^2; S_2 = -\gamma\pi r^2$$

Theo công thức (4.7) ta có:

$$x_c = \frac{S_1x_1 + S_2x_2}{S_1 + S_2} = \frac{-\pi r^2 h}{a^2 - \pi r^2} < 0$$

Vậy trọng tâm của tấm nằm bên trái O_1 .

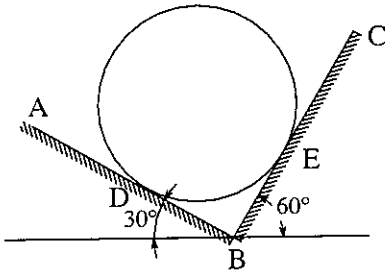
Ngoài các phương pháp đã nêu trên, người ta còn dùng phương pháp thực nghiệm để xác định trọng tâm của vật rắn.

PHẦN BÀI TẬP

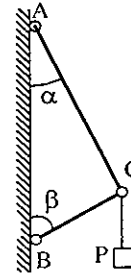
A. HỆ LỰC ĐỒNG QUY

1. Trên hai mặt phẳng nghiêng nhẵn AB và BC vuông góc với nhau đặt một trụ tròn đồng chất trọng lượng 60KN. Xác định áp lực của trụ lên các mặt phẳng biết góc giữa mặt phẳng BC và mặt phẳng nằm ngang là 60° .

ĐS: $N_D = 52 \text{ KN}$, $N_E = 30 \text{ KN}$.



Hình bài 1



Hình bài 2

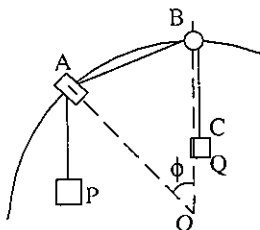
2. Hai thanh AC và BC nối với nhau và nối vào tường thẳng đứng bằng các bản lề. Tại bản lề C treo một vật trọng lượng $P = 1000\text{N}$. Bỏ qua trọng lượng các thanh. Xác định ứng lực của các thanh, biết góc hợp bởi các thanh và tường là $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$.

ĐS: $S_A = 866 \text{ N}$ và $S_B = 500 \text{ N}$.

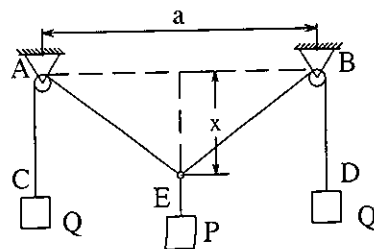
3. Một vòng nhẵn A có thể trượt không ma sát theo sợi dây thép cong có dạng đường tròn, nằm trong mặt phẳng thẳng đứng. Người ta treo vào vòng A một quả cân P và buộc vào đó sợi dây ABC luôn qua ròng rọc cố định B ở điểm cao nhất của vòng tròn. Tại đầu C treo quả cân Q. Bỏ qua trọng lượng của vòng A và ma sát của ròng rọc, tìm góc ở tâm φ của cung AB tại vị trí cân bằng và chỉ ra điều kiện cân bằng.

ĐS: $\sin \frac{\varphi_1}{2} = \frac{Q}{2P}$, (vị trí cân bằng thứ nhất xảy ra với $Q < 2P$).

$\varphi_2 = \pi$ (vị trí cân bằng thứ hai có thể xảy ra với P và Q bất kỳ).



Hình bài 3



Hình bài 4

4. Đoạn dây CAEBD vắt qua hai ròng rọc nhỏ nằm ngang A, B. Cho $AB = a$. Tại nút C và D treo hai tải trọng cùng trọng lượng Q , tại E treo tải trọng P . Bỏ qua ma sát ở hai ròng rọc. Tìm khoảng cách x từ E đến AB khi hệ ở vị trí cân bằng.

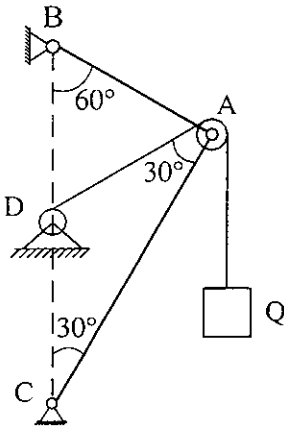
$$\text{ĐS: } x = \frac{Pa}{2\sqrt{4Q^2 - P^2}}$$

5. Vật Q có trọng lượng 20 KN treo trên cần trục ABC nhờ xích vắt qua hai ròng rọc A, D. Bỏ qua ma sát ở A và D. Các góc cho trên hình vẽ. Trọng lượng các thanh và xích không đáng kể. Tìm ứng lực trong thanh AB và AC.

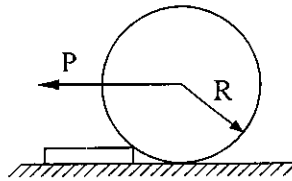
$$\text{ĐS: } S_1 = 0; S_2 = -34,6 \text{ KN.}$$

6. Tìm trị số tối thiểu của lực ngang \vec{P} để nâng con lăn nặng 40 KN, bán kính 50cm lên khỏi nền gạch cao 10cm.

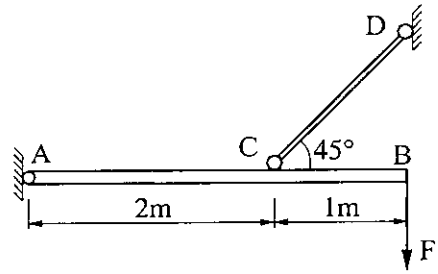
$$\text{ĐS: } P = 30 \text{ KN.}$$



Hình bài 5



Hình bài 6



Hình bài 7

7. Xà AB được giữ ở vị trí nằm ngang nhờ thanh CD và bản lề A. Tại B tác dụng lực thẳng đứng xuống dưới $F = 5 \text{ KN}$. Xác định phản lực ở bản lề A và ứng lực trong thanh CD. Bỏ qua trọng lượng xà và thanh, cho $AC = 2\text{m}$, $BC = 1\text{m}$.

$$\text{ĐS: } R_A = 7,9 \text{ KN}; S_{CD} = 10,6 \text{ KN}$$

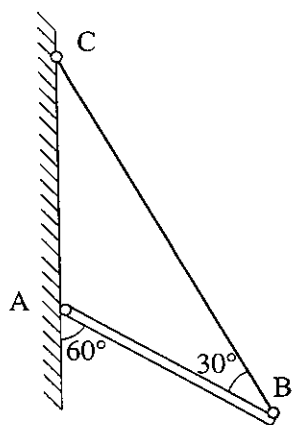
8. Thanh đồng chất AB nặng 2N được treo vào tường nhờ bản lề A và dây BC. Xác định phản lực tại A.

$$\text{ĐS: } R_A = 1\text{N}; \text{goc}(\overline{R_A}, \overline{AC}) = 60^\circ$$

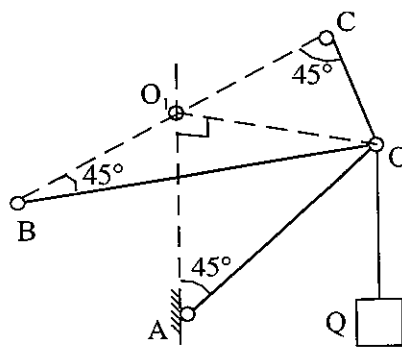
9. Thanh AO gắn bản lề tại A nghiêng góc 45° với phương nằm ngang và hai dây xích nằm ngang BO, CO cùng độ dài cùng đỡ tải trọng $Q = 100\text{N}$.

Xác định ứng lực S trong thanh và sức căng của hai dây.

$$\text{ĐS: } S = -141\text{N}, T = 71\text{N.}$$



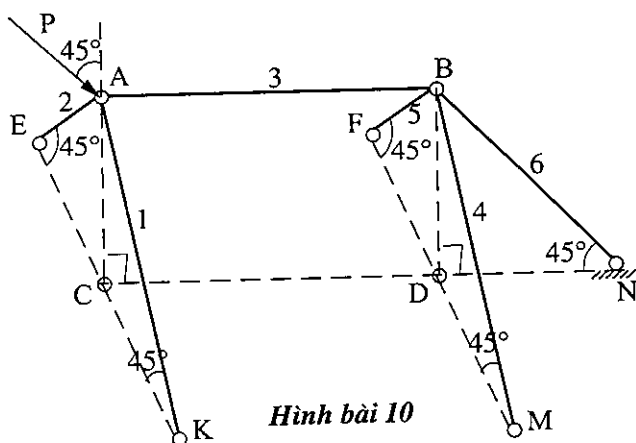
Hình bài 8



Hình bài 9

10. Một dàn không gian gồm sáu thanh 1, 2, 3, 4, 5, 6 được nối với nhau bằng khớp ở A, B. Lực $P = 10\text{KN}$ tác dụng vào nút A và nằm trong mặt phẳng thẳng đứng CABD. Tam giác FBM bằng tam giác EAK. Các góc tại đỉnh A, B, D của các tam giác cân EAK, FBM và NDB là vuông. Bỏ qua trọng lượng các thanh, xác định ứng lực của các thanh.

ĐS: $S_1 = S_2 = -5\text{ KN}$, $S_4 = S_5 = 5\text{ KN}$; $S_3 = -7,07\text{ KN}$, $S_6 = 10\text{ KN}$.



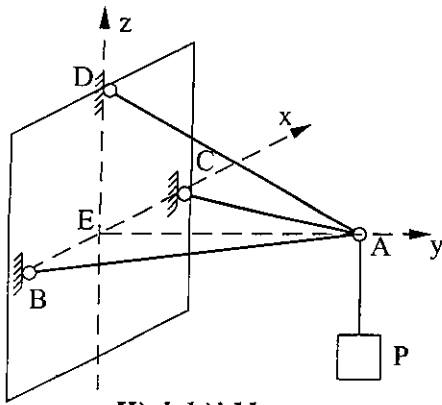
Hình bài 10

11. Hãy xác định lực dọc trong các thanh AB, AC và lực T trong dây cáp AD của cần trục nếu cho trước $\widehat{CBA} = \widehat{BCA} = 60^\circ$, $\widehat{EAD} = 30^\circ$. Vật nặng có trọng lượng $P = 3\text{KN}$. Mặt phẳng ABC nằm ngang. Các thanh gắn bản lề tại A, B, C.

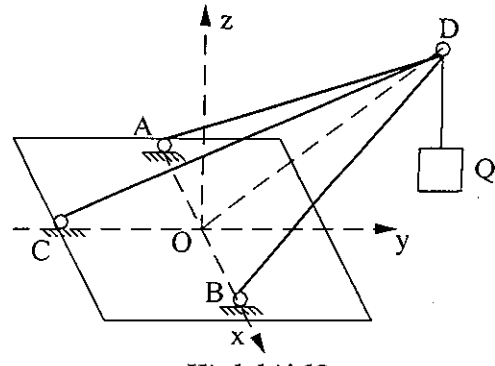
ĐS: $T_{AD} = 6\text{ kN}$; $S_{AB} = S_{AC} = -3\text{ kN}$.

12. Vật Q trọng lượng 1 kN treo tại điểm D gắn với các thanh AD, DC, BD bằng bản lề. Cho biết góc $\widehat{DAB} = \widehat{DBA} = 45^\circ$, DC lập với phương y góc 15° , DO lập với phương y góc 30° . Xác định lực dọc trong các thanh.

ĐS: $R_{AD} = R_{BD} = 2,64\text{ kN}$; $R_{DC} = 3,35\text{ kN}$.



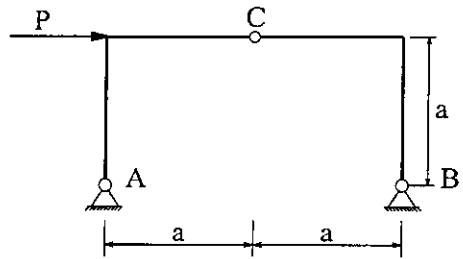
Hình bài 11



Hình bài 12

13. Cho kết cấu khung như hình vẽ. Hãy xác định phản lực của các gối A và B khi khung cân bằng dưới tác dụng của lực ngang P. Bỏ qua trọng lượng của khung.

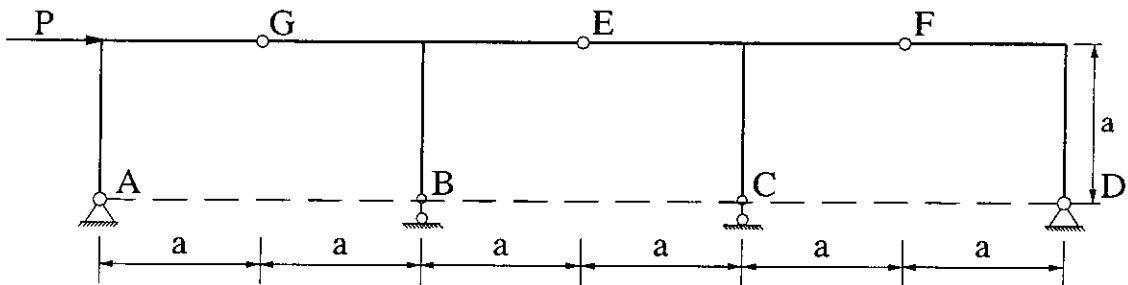
$$\text{ĐS: } R_A = R_B = \frac{P\sqrt{2}}{2}$$



Hình bài 13

14. Khung ba nhịp có các kích thước như trên hình vẽ. Xác định phản lực tại các gối A, B, C, D nếu lực tác dụng vào khung theo phương nằm ngang. Bỏ qua trọng lượng của các thanh trong khung.

$$\text{ĐS: } R_A = \frac{P\sqrt{2}}{2}; R_B = P; R_C = P; R_D = \frac{P\sqrt{2}}{2}$$

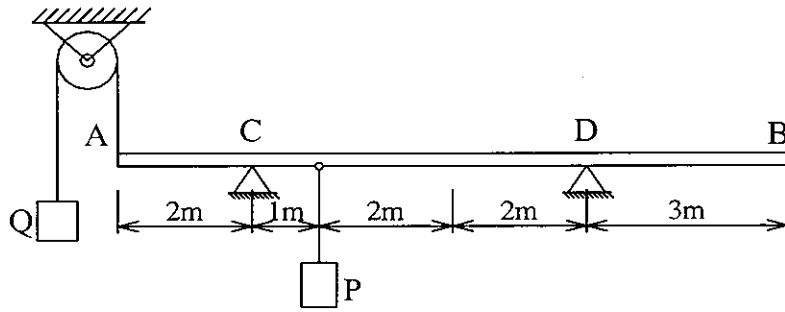


Hình bài 14

B. HỆ LỰC SONG SONG

15. Dầm AB dài 10m nặng 200 N nằm trên hai gối đỡ C và D. Gối đỡ C cách đầu mút A 2m, gối đỡ D cách đầu mút B 3m. Đầu mút A của dầm được kéo thẳng lên trên nhờ tải trọng Q = 300N và sợi dây vắt qua ròng rọc, tải trọng P = 800N treo vào dầm tại điểm cách đầu mút A 3m. Xác định phản lực của các gối đỡ, bỏ qua ma sát của ròng rọc.

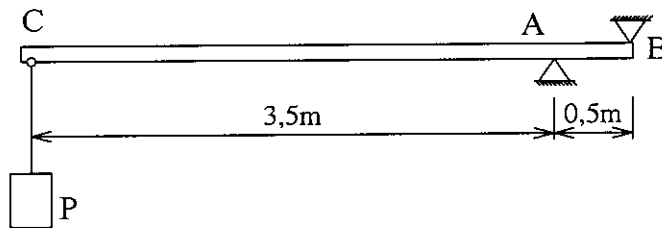
$$\text{ĐS: } R_C = 300 \text{ N}, R_D = 400 \text{ N}$$



Hình bài 15

16. Một dầm ngang đồng chất dài 4m nặng 0,5 tấn đặt sâu vào tường có chiều dày 0,5m sao cho dầm tựa tại hai điểm A và B. Xác định phản lực tại những điểm này nếu ta treo tải trọng $P = 4$ tấn vào đầu mút tự do của dầm.

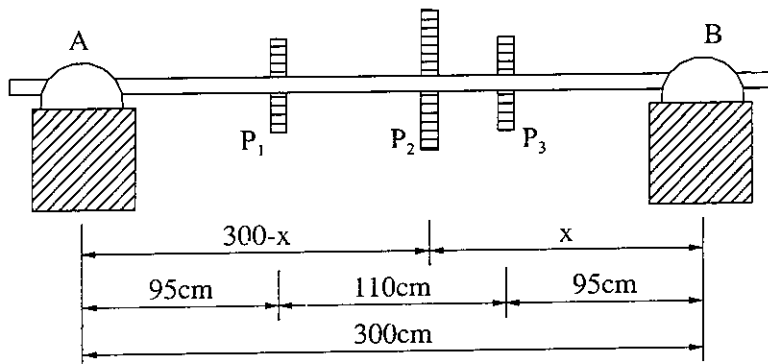
ĐS: $N_A = 34T, N_B = 29,5T$



Hình bài 16

17. Trục truyền động AB mang ba puli có trọng lượng $P_1 = 300$ N, $P_2 = 500$ N, $P_3 = 200$ N, các kích thước như trên hình vẽ. Bỏ qua trọng lượng của trục. Xác định khoảng cách x giữa puli có trọng lượng P_2 và ổ trục B, sao cho phản lực ở ổ trục B bằng phản lực ở ổ trục A.

ĐS: $x = 139$ cm.

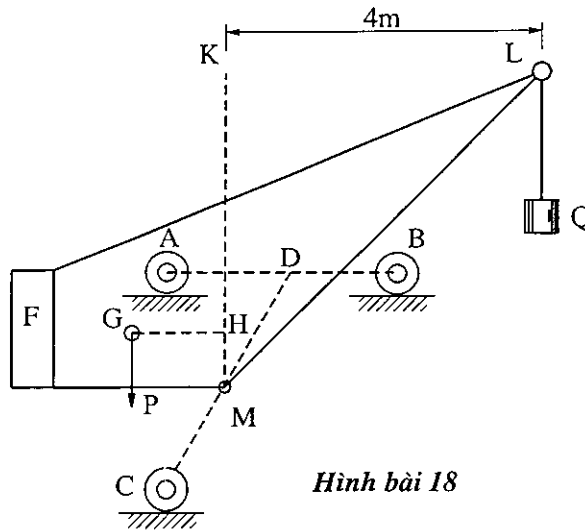


Hình bài 17

18. Một cần trục đặt trên ba bánh xe ABC. Cho biết kích thước của cần trục $AD = DB = 1$ m, $CD = 1,5$ m, $CM = 1$ m, $KL = 4$ m. Cần trục cân bằng nhờ đối trọng F. Trọng

lượng của cần trục và đối trọng là $P = 100 \text{ KN}$ đặt tại điểm G nằm trong mặt phẳng LKMF với khoảng cách $GH = 0,5\text{m}$. Cần trục nâng vật nặng $Q = 30 \text{ KN}$. Tìm áp lực của bánh xe lên đường ray ứng với vị trí mặt phẳng LMF song song với AB .

$$\text{ĐS: } N_A = 8\frac{1}{3} \text{ KN}, N_B = -78\frac{1}{3} \text{ KN}, N_C = 43\frac{1}{3} \text{ KN}$$

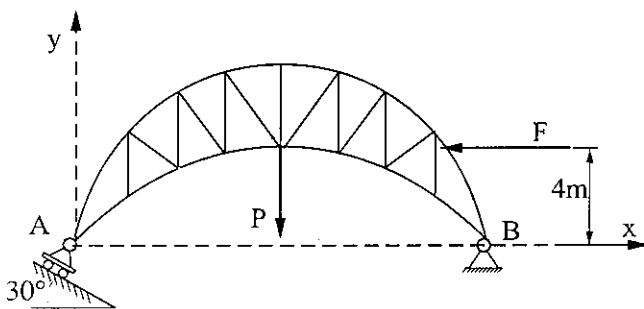


Hình bài 18

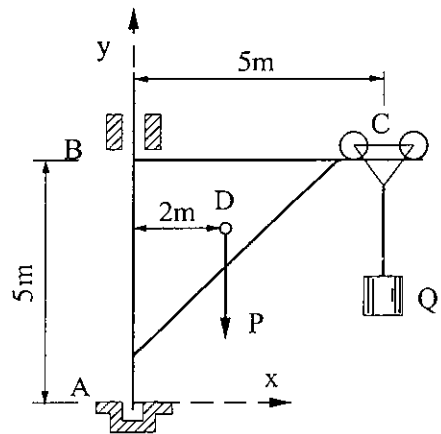
C. HỆ LỰC PHẪNG

19. Cầu hình cung có gối di động A và gối cố định B trọng lượng $P = 100\text{KN}$ đặt tại điểm giữa. Cầu chịu hợp lực của tải trọng gió $F = 20 \text{ KN}$ cách mặt cầu 4m, nhịp cầu $AB = 20\text{m}$. Xác định phản lực tại hai gối đỡ A và B.

$$\text{ĐS: } R_A = 62,4 \text{ KN}; X_B = -11,2 \text{ KN}; Y_B = 46 \text{ KN}$$



Hình bài 19

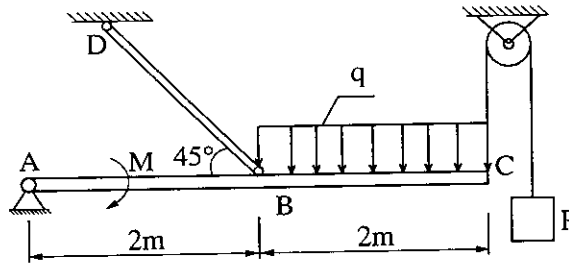


Hình bài 20

20. Cần trục ABC dùng trong xưởng đúc có trục quay thẳng đứng AB với $AB = 5\text{m}$, $BC = 5\text{m}$, trọng lượng cần trục bằng 20 KN . Trọng tâm D của cần trục cách trục quay

2m. Tải trọng nâng lên treo ở C và nặng 30 KN. Xác định các phản lực ở gối A và ngõng B.

ĐS: $X_B = -38 \text{ KN}$; $X_A = 38 \text{ KN}$; $Y_A = 50 \text{ KN}$



Hình bài 21

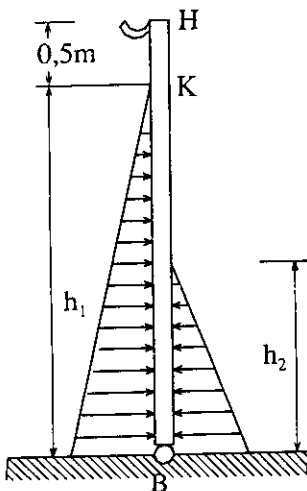
21. Thanh AC được giữ nằm ngang nhờ gối tựa cố định A và thanh treo BD. Đầu C được buộc vào một sợi dây vắt qua ròng rọc cố định hoàn toàn trơn nhẵn, đầu kia của sợi dây buộc vào tải vật P. Tải trọng phân bố đều tác dụng lên BC có cường độ $q = 2 \text{ KN/m}$. Biết $M = 8 \text{ KNm}$, $P = 4 \text{ KN}$, $AB = BC = 2\text{m}$, BD lập với phương ngang góc 45° . Bỏ qua trọng lượng các thanh. Tìm phản lực ở A và ứng lực trong thanh BD.

ĐS: $X_A = 2 \text{ KN}$; $Y_A = -2 \text{ KN}$; $S = 2\sqrt{2} \text{ KN}$.

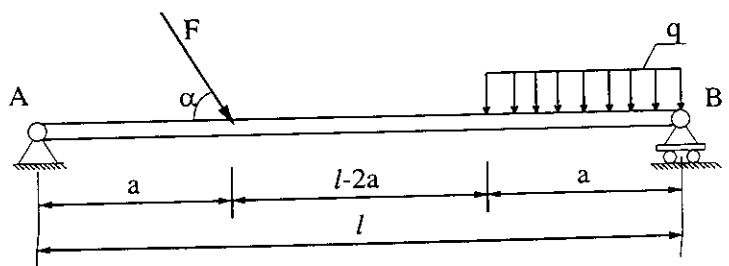
22. Một cửa cống hình chữ nhật rộng $b = 2\text{m}$ liên kết với đáy công trình bằng bản lề trụ nằm ngang, còn phía trên có móc giữ chặt. Chiều sâu của nước phía trước cửa cống là $h_1 = 4\text{m}$; phía sau cửa cống là $h_2 = 2\text{m}$.

Chốt bản lề và móc chịu tất cả áp lực phân bố của nước lên cống. Biết áp lực riêng của nước là $\sigma = 10\text{KN/m}^2$; $HK = 0,5\text{m}$. Xác định phản lực của chốt bản lề B và phản lực của móc H.

ĐS: $R_B = 17,8\text{KN}$; $R_H = 22,2\text{KN}$.



Hình bài 22



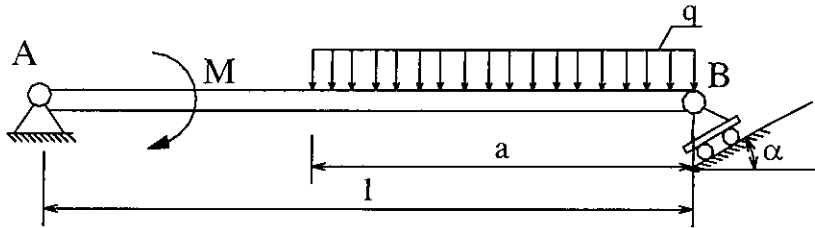
Hình bài 23

23. Xà $AB = l = 3\text{m}$; bỏ qua trọng lượng bản thân. Xà được giữ nằm ngang bởi bản lề tại A và con lăn B, chịu tác dụng lực phân bố đều $q = 2\text{KN/m}$ và $F = 4\text{KN}$ có phương nghiêng so với xà góc $\alpha = 60^\circ$. Biết $a = 1\text{m}$. Tính phản lực tại A, B.

ĐS: $X_A = 2,0\text{KN}$; $Y_A = 2,98\text{KN}$; $N_B = 2,48\text{KN}$.

24. Xà $AB = l = 3\text{m}$, bỏ qua trọng lượng bản thân, được liên kết bản lề tại A còn đầu B tựa trên con lăn nghiêng so với phương ngang góc $\alpha = 30^\circ$, chịu tác dụng lực phân bố đều $q = 2\text{KN/m}$ trên đoạn $a = 2\text{m}$ và một ngẫu lực $M = 3\text{KN.m}$ như hình vẽ. Tính phản lực tại A, B.

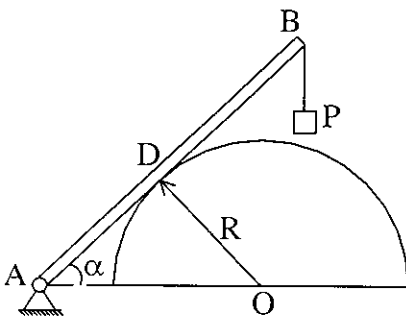
ĐS: $X_A = 2,12\text{KN}$; $Y_A = 0,33\text{KN}$; $N_B = 4,24\text{KN}$.



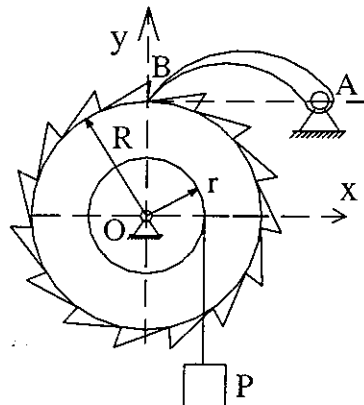
Hình bài 24

25. Một xà đồng chất $AB = l = 2,7\text{m}$ trọng lượng $Q = 10\text{N}$ tựa trên một trụ tròn nhẵn bán kính $R = 0,6\text{m}$ tại D. Đầu A bắt bản lề còn đầu B treo vật nặng trọng lượng $P = 5\text{N}$, góc $\alpha = 60^\circ$. Xác định phản lực tại A, D.

ĐS: $X_A = 33,5\text{N}$; $Y_A = 4,5\text{N}$; $N_D = 39\text{N}$.



Hình bài 25



Hình bài 26

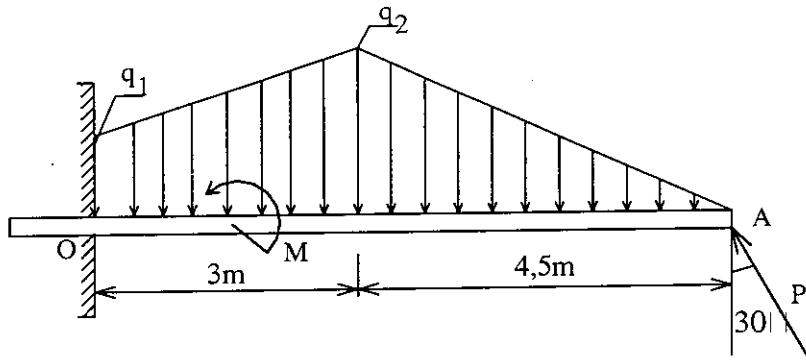
26. Vật nặng trọng lượng P treo ở đầu dây cuốn quanh vành trong bán kính r của tang quay O, vành ngoài bán kính R có răng ăn vào cóc hãm nằm ngang AB không trọng lượng.

Tính phản lực ở trục quay O và của cóc hãm AB.

ĐS: $X_O = -P \frac{r}{R}$; $Y_A = P$; $S_{AB} = P \frac{r}{R}$.

27. Cho kết cấu dầm nằm ngang, chịu lực như hình vẽ. Bỏ qua trọng lượng bản thân dầm. Biết $P = 5\text{KN}$; $M = 4\text{KN.m}$; $q_1 = 2\text{KN/m}$; $q_2 = 4\text{KN/m}$. Xác định phản lực tại ngàm O.

ĐS: $Y_O = 13,7\text{KN}$; $X_O = 2,5\text{KN}$; $M_O = 19,02\text{KN.m}$

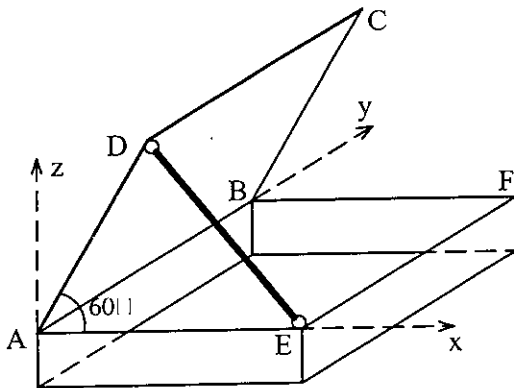


Hình bài 27

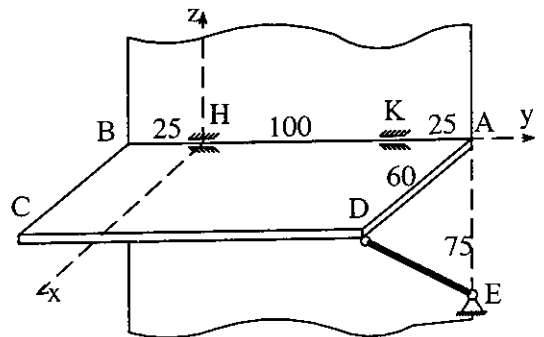
D. HỆ LỰC KHÔNG GIAN

28. Nắp đồng chất ABCD của hộp chữ nhật liên kết bản lề tại A, B và được giữ nhờ thanh chống DE. Nắp nặng 12N, $AD = AE$, góc $DAE = 60^\circ$. Bỏ qua trọng lượng thanh. Tìm phản lực tại A, B và ứng lực trong thanh DE.

ĐS: $X_A = 1,73\text{ N}$; $Z_A = 3\text{ N}$; $X_B = 0$; $Z_B = 6\text{ N}$; $S = 3,46\text{ N}$.



Hình bài 28



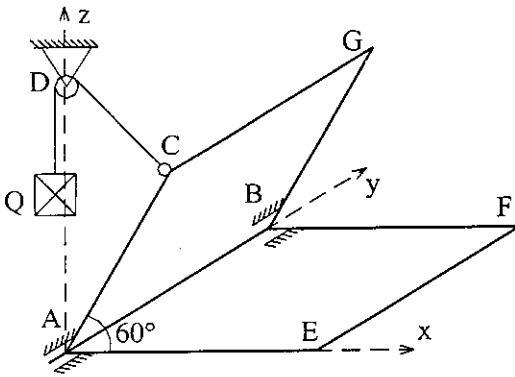
Hình bài 29

29. Giá đỡ hàng ABCD của một toa xe có thể quay quanh trục AB nhờ hai bản lề trụ H, K được giữ ở vị trí nằm ngang bởi thanh đỡ ED. Trọng lượng tổng cộng trên tấm là $P = 80\text{ N}$ và đặt tại tâm của tấm. Kích thước như hình vẽ (đơn vị là cm). Xác định phản lực tại H, K và ứng lực trong thanh DE.

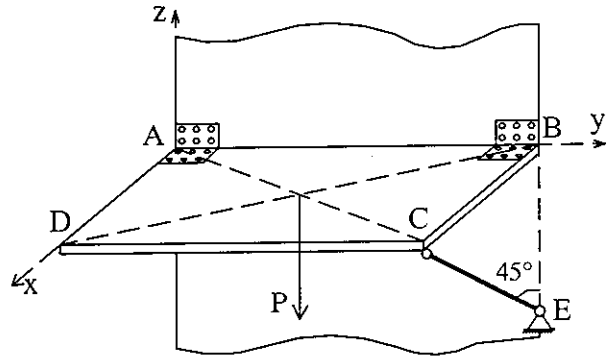
ĐS: $X_B = 13\frac{1}{3}\text{ N}$; $Z_B = 50\text{ N}$; $X_K = 66\frac{2}{3}\text{ N}$; $Z_K = -10\text{ N}$; $S = 66\frac{2}{3}\text{ N}$.

30. Nắp chữ nhật đồng chất nặng 40N được mở so với phương nằm ngang một góc 60° nhờ đôi trọng Q. Bỏ qua ma sát ở ròng rọc D trên đường thẳng đứng, Biết $AD = AC$. Tìm trị số lực Q và phản lực ở bản lề A, B.

ĐS: $Q = T = 10,4 \text{ N}$; $X_B = 0$; $Z_B = 20 \text{ N}$; $X_A = 10 \text{ N}$; $Z_A = 17,3 \text{ N}$.



Hình bài 30



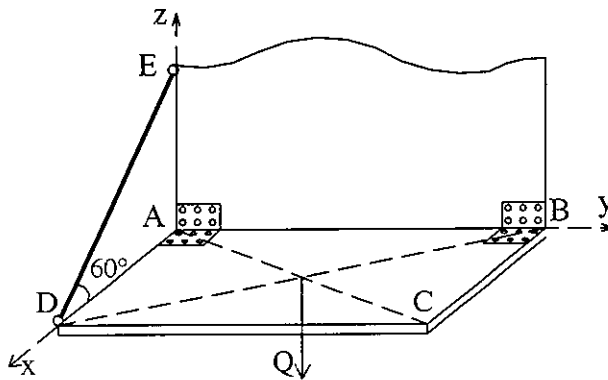
Hình bài 31

31. Tấm chữ nhật đồng chất có thể quay quanh trục nằm ngang nhờ hai bản lề A và B. Nhờ thanh chống EC nằm trong mặt phẳng thẳng đứng qua BC mà cánh cửa được giữ nằm ngang. Tấm có trọng lượng $P = 200\text{N}$. Bỏ qua trọng lượng thanh EC; $\widehat{CEB} = 45^\circ$. Tìm ứng lực của thanh và phản lực ở A, B.

ĐS: $S = 100\sqrt{2} \text{ N}$; $X_A = 0$; $Z_A = 100\text{N}$; $X_B = -100\text{N}$; $Z_B = 0$.

32. Tấm chữ nhật đồng chất trọng lượng Q được giữ nằm ngang nhờ hai bản lề A, B và dây DE nằm trong mặt phẳng thẳng đứng qua AD. Xác định phản lực tại A, B và sức căng dây DE.

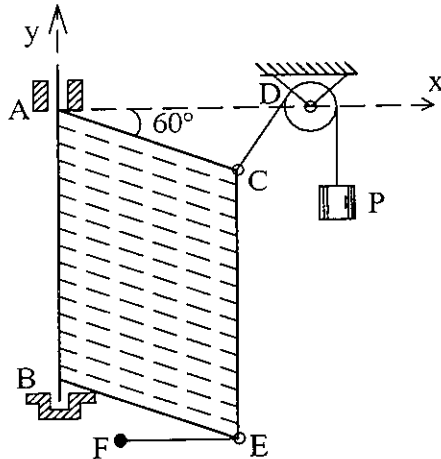
ĐS: $Z_A = 0$; $X_A = \frac{Q}{2\sqrt{3}}$; $X_B = 0$; $Z_B = \frac{Q}{2}$; $T = \frac{Q}{\sqrt{3}}$.



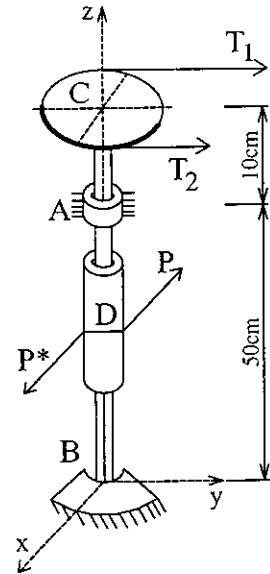
Hình bài 32

33. Cánh cửa hình chữ nhật đồng chất ABEC nặng 640 KN, chiều rộng AC = AD = 1,8m, chiều cao AB = 2,4m, có trục quay thẳng đứng, mở một góc CÂD = 60° và được giữ ở vị trí đó nhờ hai sợi dây: CD vắt qua ròng rọc và kéo căng bởi tải trọng P = 320 N, còn dây EF song song với trục Ax buộc vào điểm F của sàn. Bỏ qua ma sát ở ròng rọc. Xác định sức căng T của dây EF và phản lực ở A, B.

ĐS: T = 320 N; X_A = 69 N; Y_A = -280 N; X_B = 208 N; Y_B = 440 N; Z_B = 640 N.



Hình bài 33



Hình bài 34

34. Trụ thẳng đứng AB được đỡ bởi ổ bản lề A và côi B mang theo bánh xe C và rôto D. Tổng trọng lượng bánh xe và rôto là Q = 200 N.

Bánh xe C có bán kính 10 cm với hai nhánh đai truyền song song, sức căng T₁ = 100 N và T₂ = 50 N.

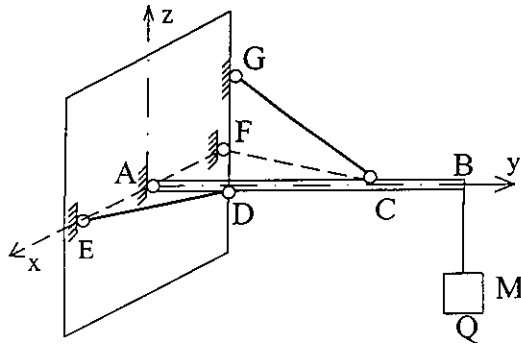
Các kích thước như hình vẽ. Tìm các phản lực tại A, B và mômen ngẫu lực (P, P*) cần có ở rôto D để hệ cân bằng.

ĐS: M = 5 Nm; Z_B = 200 N; Y_B = 30N; X_A = X_B = 0; Y_A = -180 N.

35. Xà đồng chất AB trọng lượng P chiều dài l = 4b gắn vào tường bằng bản lề cầu A và được giữ vuông góc với tường bằng các dây DE và CG. Dây DE nằm ngang, còn dây CG tạo với mặt phẳng ngang góc α. Tại B treo vật M trọng lượng Q. Xác định phản lực tại A và sức căng dây. Cho biết AE = AD = DC = b, AF = 2b.

ĐS: X_A = $\frac{-\sqrt{2}}{2}(P+2Q)\text{ctg}\alpha$; Y_A = $\frac{3\sqrt{2}}{2}(P+2Q)\text{ctg}\alpha$; Z_A = - Q;

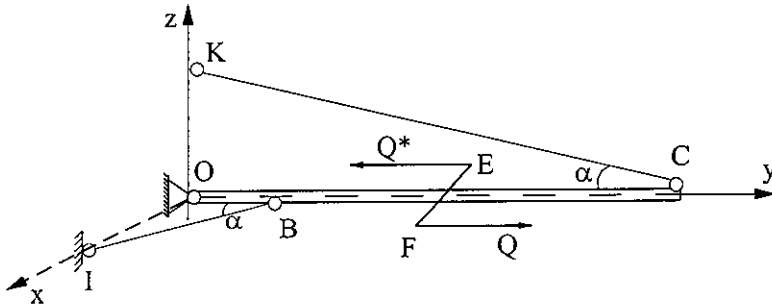
T_{DE} = 2(P+2Q)ctgα; T_{CG} = $\frac{P+2Q}{\sin\alpha}$.



Hình bài 35

36. Dầm ngang OC đồng chất dài 2m, trọng lượng $P = 1000\text{N}$ chịu tác dụng của ngẫu lực (\vec{Q}, \vec{Q}^*) nằm trong mặt phẳng nằm ngang. Cho $Q = 100\text{N}$, $\alpha = 30^\circ$, $EF = 20\text{cm}$. Dầm liên kết với tường bằng gối cầu O và được giữ cân bằng nhờ hai dây IB và CK, $OB = 0,5\text{m}$. Xác định phản lực ở O và sức căng của các dây.

ĐS: $T_1 = 1000\text{N}$; $T_2 = 80\text{N}$; $X_0 = 40\text{N}$; $Y_0 = 540\sqrt{3}\text{N}$; $Z_0 = 500\text{N}$

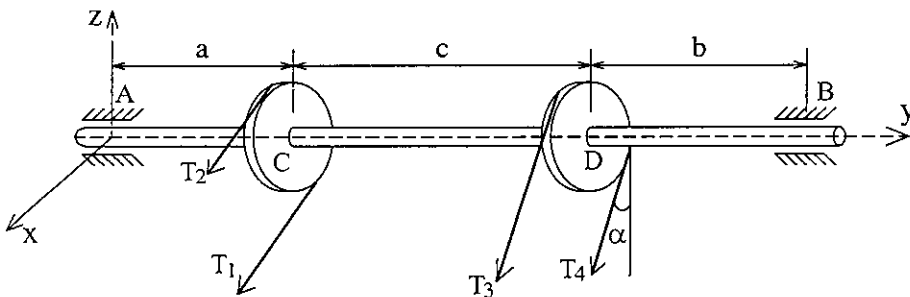


Hình bài 36

37. Trục nằm ngang AB có hai pu-li C và D mang đai truyền có thể quay quanh trục y. Bán kính pu-li $R_C = 20\text{ cm}$, $R_D = 25\text{cm}$, $a = b = 50\text{ cm}$, $c = 100\text{ cm}$.

Lực căng ở pu-li C nằm ngang $T_1 = 2T_2 = 500\text{N}$, còn ở pu-li D thì tạo với phương thẳng đứng góc $\alpha = 30^\circ$ và $T_3 = 2T_4$. Xác định lực căng T_4 và các phản lực ở A, B khi trục cân bằng.

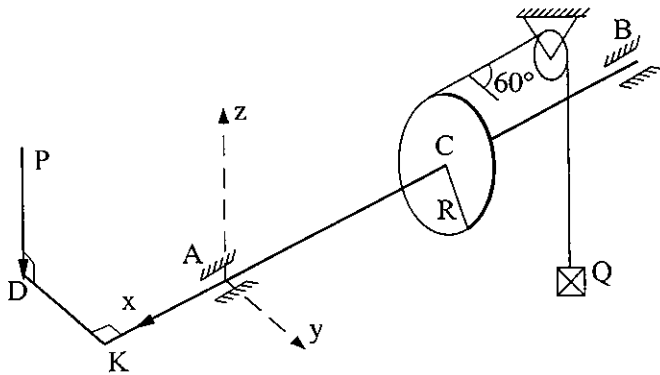
ĐS: $T_4 = 200\text{ N}$; $X_A = -637,5\text{ N}$; $Z_A = 130\text{ N}$; $X_B = -412,5\text{ N}$; $Z_B = 390\text{ N}$.



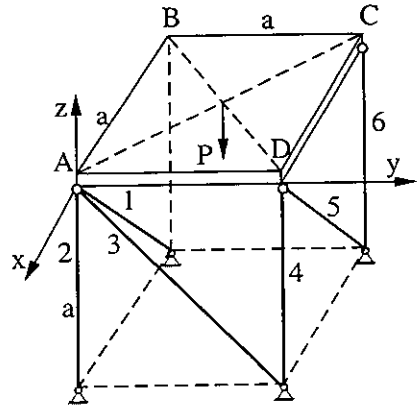
Hình bài 37

38. Nhờ trục quay AB như hình vẽ mà tải trọng $Q = 100 \text{ N}$ được nâng lên. Biết $R = 5 \text{ cm}$, $KD = 40 \text{ cm}$, $KA = 30 \text{ cm}$, $AC = 40 \text{ cm}$, $CB = 60 \text{ cm}$. Dây tiếp tuyến với đĩa C và nghiêng với phương ngang góc 60° . KD nằm ngang. Tìm trị số lực P và phản lực ở A, B.

ĐS: $P = 12,5 \text{ N}$; $X_A = -30 \text{ N}$; $Z_A = -35,7 \text{ N}$; $X_B = -20 \text{ N}$; $Z_B = -38,4 \text{ N}$



Hình bài 38

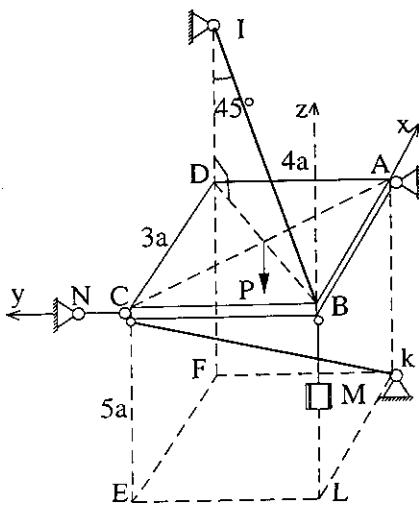


Hình bài 39

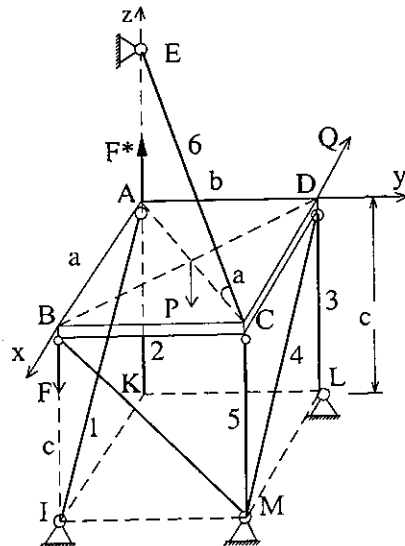
39. Tám vuông đồng chất ABCD cạnh a, trọng lượng P được giữ nằm ngang nhờ sáu thanh 1, 2, 3, 4, 5, 6. Chiều dài thanh đứng là a. Bỏ qua trọng lượng các thanh. Tìm ứng lực trong sáu thanh.

ĐS: $S_1 = S_3 = S_4 = S_5 = 0$; $S_2 = S_6 = -P/2$

40. Tám chữ nhật đồng chất ABCD trọng lượng P kích thước như hình vẽ, được giữ nằm ngang nhờ khớp cầu A, thanh CN, CK và dây BI. Tại B treo vật M có trọng lượng Q. Bỏ qua trọng lượng dây và các thanh, các thanh liên kết bản lề ở hai đầu. Lập các phương trình để xác định phản lực ở khớp cầu A, lực căng dây BI và ứng lực trong các thanh CN, CK.



Hình bài 40



Hình bài 41

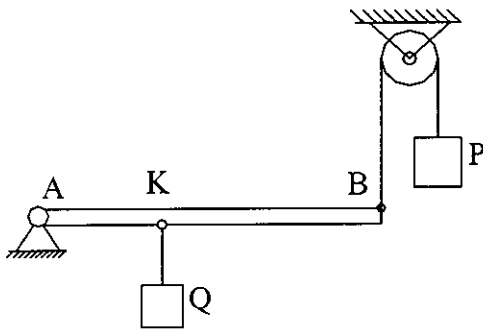
41. Tấm chữ nhật đồng chất ABCD trọng lượng P được giữ nằm ngang nhờ sáu thanh như hình vẽ. Bỏ qua trọng lượng các thanh. Tấm chịu tác dụng của lực Q hướng dọc theo CD và của ngẫu lực (F, F*). Biết AB = a; AD = b; chiều cao AK = c.

Lập các phương trình để xác định ứng lực trong 6 thanh.

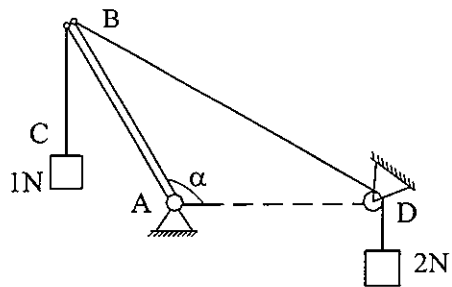
E. BÀI TOÁN ĐÒN PHẪNG, VẬT LẬT

42. Thanh đồng chất AB nằm ngang trọng lượng 100N có thể quay quanh bản lề A cố định. Đầu B được giữ nhờ quả tạ P = 150N buộc vào sợi dây không giãn vắt qua ròng rọc không ma sát. Tại điểm K treo vật nặng Q = 500N, với BK = 2m. Tìm độ dài AB để thanh cân bằng.

ĐS: AB = 2,5m.



Hình bài 42



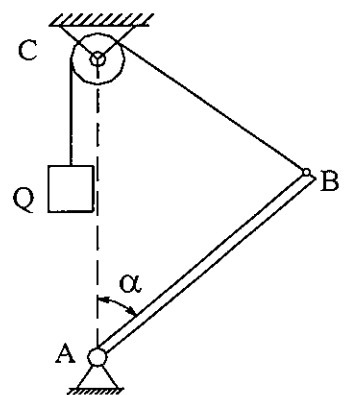
Hình bài 43

43. Thanh đồng chất AB nặng 2N có thể quay quanh bản lề A. Mút B treo quả cân nặng 1N. Một dây khác luôn qua ròng rọc D có buộc quả cân nặng 2N và cũng buộc vào B. Biết AB = AD, bỏ qua ma sát ở ròng rọc. Tìm góc α khi thanh cân bằng.

ĐS: $\alpha = 120^\circ$.

44. Thanh đồng chất AB trọng lượng P, đầu A gắn bản lề với tường, đầu B buộc vào dây không giãn luôn qua ròng rọc không ma sát C và buộc vào tải trọng Q. Cho AB = AC. Tìm góc α khi thanh cân bằng.

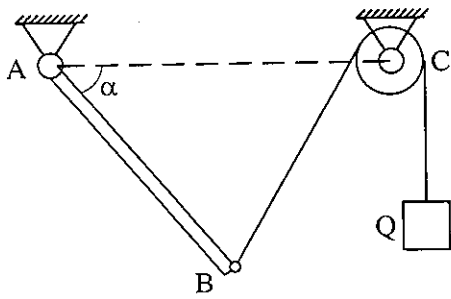
ĐS: $\alpha = 2\arcsin \frac{Q}{P}$.



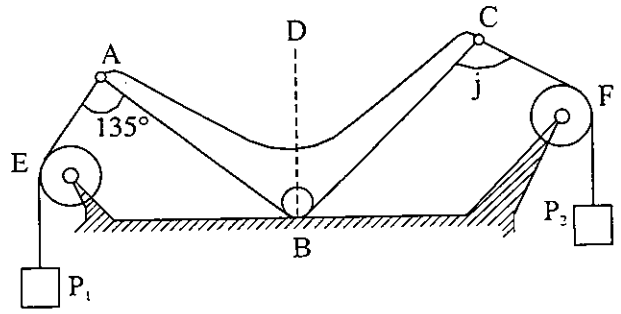
Hình bài 44

45. Thanh AB đồng chất trọng lượng P, đầu A gắn bản lề với trần còn đầu B buộc dây không giãn luôn qua ròng rọc không ma sát C và treo tải trọng có trọng lượng Q. Biết AB = AC. Xác định góc α khi thanh cân bằng.

ĐS: $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{Q + \sqrt{Q^2 + 2P}}{2P}$



Hình bài 45



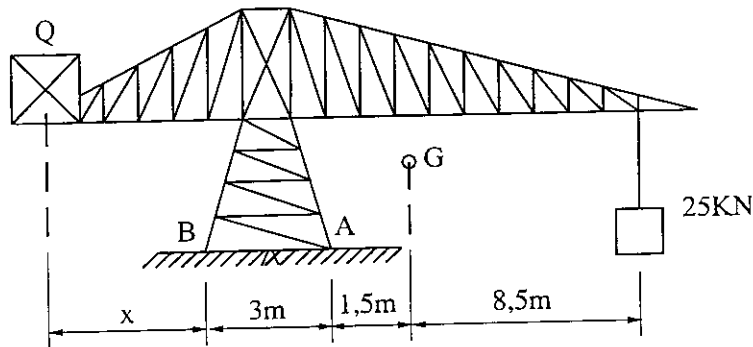
Hình bài 46

46. Đòn bẩy ABC nặng 80N có trục B cố định, cánh tay đòn AB = 40cm, BC = 100cm, trọng tâm đòn bẩy lệch về phía phải đường đứng BD là 21,2cm. Tại A và C buộc dây vắt qua hai ròng rọc bỏ qua ma sát E và F, có mang hai vật nặng $P_1 = 310\text{N}$, $P_2 = 100\text{N}$. Góc BAE = 135° khi đòn bẩy cân bằng. Tính góc $\varphi = \angle BCF$.

$$\text{ĐS: } \varphi = \begin{cases} 45^\circ \\ 135^\circ \end{cases}$$

47. Trọng lượng cần trục không có đối trọng là 50 kN đặt cách bánh xe A về bên phải một khoảng 1,5 m. Tải trọng nâng của cần với là 25 kN. Tay đòn dài 10m kể từ bánh xe A. Xác định đối trọng bé nhất Q và khoảng cách lớn nhất x kể từ trọng tâm đối trọng đến đường thẳng đứng qua B để cần trục không bị lật đổ khi cần trục có tải trọng cũng như khi nó không có tải trọng. Bỏ qua trọng lượng cần với.

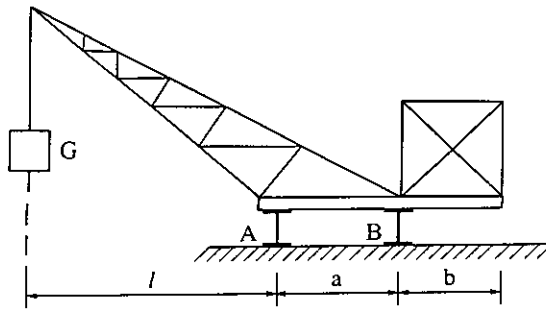
$$\text{ĐS: } Q = 31\frac{1}{3} \text{ kN}; x = 6,75 \text{ m.}$$



Hình bài 47

48. Cần trục nặng $Q = 200 \text{ kN}$ có độ dài tay đòn $l = 5\text{m}$, chiều rộng của đáy AB = $a = 4\text{m}$. Đối trọng có hình lập phương cạnh $b = 2\text{m}$ nặng $P = 50\text{kN}$. Trọng tâm của cần trục nằm trên đường trung trực của AB. Tìm tải trọng lớn nhất cần trục có thể nâng được mà nó không bị lật quanh A.

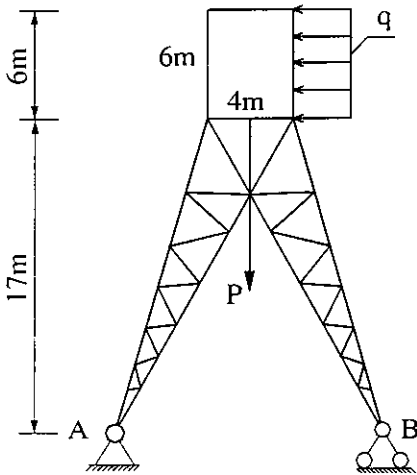
$$\text{ĐS: } G = 130 \text{ kN.}$$



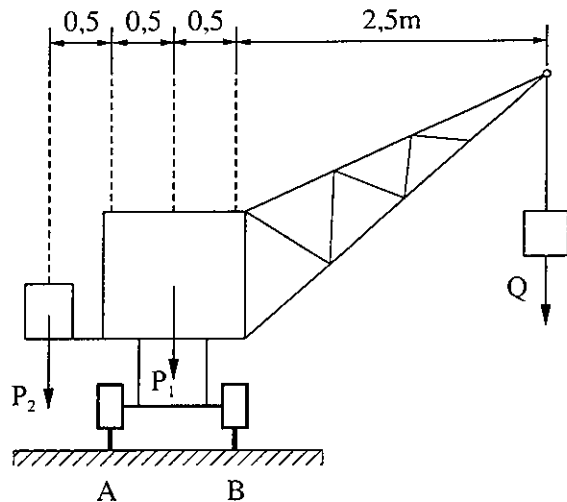
Hình bài 48

49. Bể chứa nước hình trụ cao 6m đường kính đáy 4m được đặt trên 4 cột đối xứng, trọng lượng cả bể và cột là 80 KN. Áp lực ngang của gió tác dụng lên mặt cắt dọc của trụ với cường độ $q = 1,25 \text{ KN/m}^2$. Tìm khoảng cách cần thiết giữa các chân cột để bể khỏi bị lật.

ĐS: $AB \geq 15\text{m}$.



Hình bài 49



Hình bài 50

50. Cho cần trục chạy trên đường ray có trọng lượng $P_1 = 40 \text{ KN}$, đối trọng có trọng lượng $P_2 = 20 \text{ KN}$. Tìm trọng lượng lớn nhất của vật cầu mà cần trục có thể nhấc lên được mà không bị lật. Kích thước cho như trên hình vẽ.

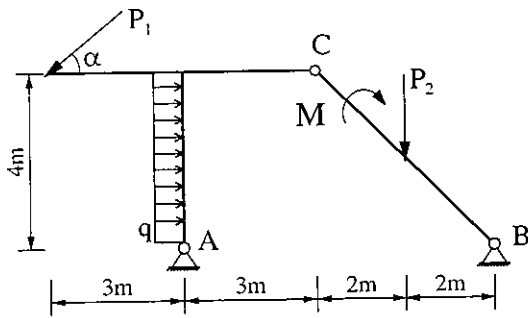
ĐS: $Q \leq 20 \text{ KN}$.

E. BÀI TOÁN HỆ VẬT

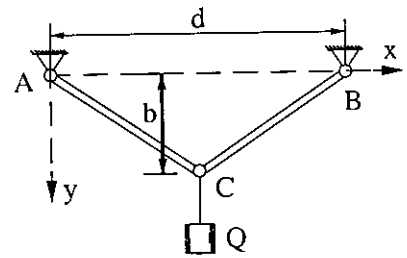
51. Cho hệ kết cấu chịu hệ lực như hình vẽ, bỏ qua trọng lượng các thanh. Biết $P_1 = 10\text{kN}$; $P_2 = 12\text{kN}$; $M = 25\text{kNm}$; $q = 2\text{kN/m}$; $\alpha = 60^\circ$. Xác định phản lực tại A, B và C.

ĐS: $X_A = -7,39 \text{ kN}$; $Y_A = 12,8 \text{ kN}$; $X_B = 4,39 \text{ kN}$;

$Y_B = 7,86 \text{ kN}$; $X_C = -4,39 \text{ kN}$; $Y_C = 4,14 \text{ kN}$.



Hình bài 51



Hình bài 52

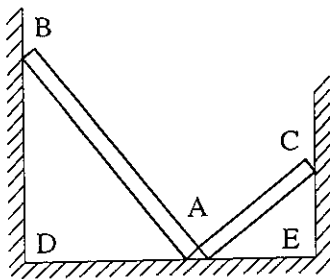
52. Hai xà đồng chất dài như nhau nối khớp với nhau tại điểm C; tại các điểm A và B chúng cũng được gắn khớp với gối đỡ. Trọng lượng của mỗi xà bằng P. Tải trọng Q treo vào điểm C. Khoảng cách $AB = d$; khoảng cách từ điểm C đến đường thẳng nằm ngang AB bằng b. Hãy xác định phản lực tại các khớp A và B.

$$\text{ĐS: } -X_A = X_B = \frac{d}{4b}(P+Q); \quad Y_A = Y_B = P + \frac{Q}{2}.$$

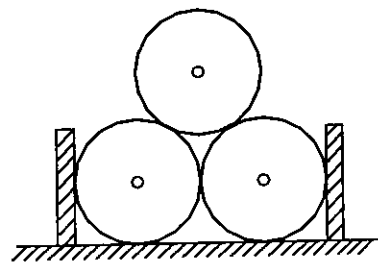
53. Thanh đồng chất AB và AC cùng tựa trên một sàn trơn nằm ngang tại điểm A và tựa vào nhau trong một mặt phẳng trơn thẳng đứng; ngoài ra chúng còn tựa vào các tường trơn thẳng đứng tại các điểm B và C.

Hãy xác định khoảng cách DE giữa các bức tường để các thanh lúc tạo với nhau góc 90° sẽ ở vị trí cân bằng. Cho trước độ dài $AB = a$; $AC = b$; trọng lượng của thanh AB bằng P_1 , trọng lượng của thanh AC bằng P_2 .

$$\text{ĐS: } DE = \frac{a\sqrt{P_2} + b\sqrt{P_1}}{\sqrt{P_1 + P_2}}.$$



Hình 53



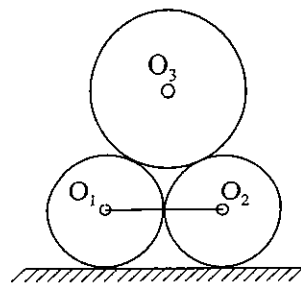
Hình 54

54. Ba ống như nhau cùng trọng lượng $P = 120 \text{ KN}$ đặt nằm như hình vẽ. Bỏ qua ma sát. Hãy xác định áp lực của mỗi ống nằm dưới lên đất và lên các tường giữ chúng.

$$\text{ĐS: } \text{Áp lực lên đất bằng } 180 \text{ KN.}$$

$$\text{Áp lực lên mỗi tường bằng } 34,6 \text{ KN.}$$

55. Hai trụ tròn đồng chất như nhau cùng bán kính r và cùng trọng lượng P nằm trên nền ngang; đồng thời tâm của chúng được nối với nhau bằng sợi dây không giãn dài $2r$. Một trụ đồng chất thứ ba bán kính R trọng lượng Q đặt nằm yên lên hai trụ trên.



Hình bài 55

Hãy xác định sức căng của dây, áp lực của các trụ lên nền và áp lực tương hỗ giữa các trụ. Bỏ qua ma sát.

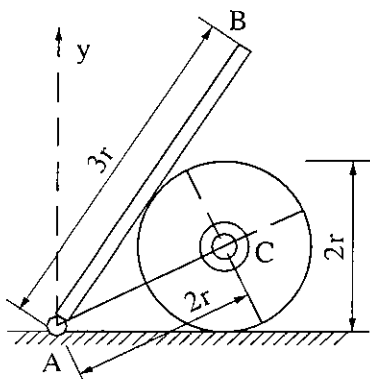
ĐS: Áp lực của mỗi trụ nằm dưới lên nền bằng $P + \frac{Q}{2}$.

Áp lực giữa trụ trên với mỗi trụ dưới bằng $\frac{Q(R+r)}{2\sqrt{R^2 + 2rR}}$;

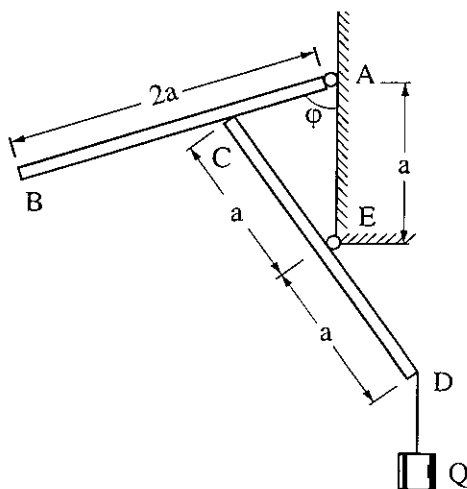
Sức căng của dây bằng $\frac{Qr}{2\sqrt{R^2 + 2rR}}$.

56. Xà đồng chất AB có thể quay quanh trục nằm ngang A và tựa lên mặt trụ tròn bán kính r . Trụ nằm trên mặt phẳng ngang trơn và được giữ bằng dây không giãn AC. Xà nặng 16KN ; độ dài $AB = 3r$; $AC = 2r$. Hãy xác định sức căng T của dây và áp lực của xà lên khớp A.

ĐS: $T = 6,9 \text{ KN}$; $X_A = -6 \text{ KN}$; $Y_A = -12,5 \text{ KN}$.



Hình bài 56



Hình bài 57

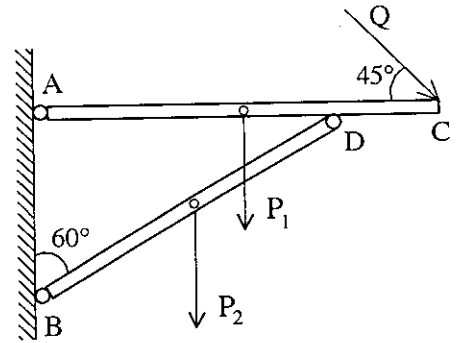
57. Thanh đồng chất AB chiều dài $2a$ trọng lượng P có thể quay xung quanh trục nằm ngang qua A ở đầu mút thanh. Thanh AB tựa lên thanh đồng chất CD cũng có chiều dài $2a$, thanh này có thể quay xung quanh trục nằm ngang đi qua trung điểm E của nó. Các điểm A và E cùng nằm trên đường thẳng đứng, $AE = a$. Tại D treo vật nặng $Q = 2P$. Bỏ qua ma sát.

Xác định góc φ hợp bởi thanh AB và phương thẳng đứng khi hệ cân bằng.

$$\text{ĐS: } \varphi = \arccos \frac{1}{8} = 82^{\circ} 50'$$

58. Hai thanh đồng chất AC và BD có chiều dài bằng nhau và có trọng lượng $P_1 = P_2 = 40$ KN được nối với nhau bằng bản lề ở D và gắn với tường thẳng đứng bằng bản lề ở A và B. Thanh AC nằm ngang còn thanh BD hợp với đường thẳng đứng góc 60° . Lực Q hợp với phương ngang góc 45° . Biết $Q = 100$ KN. Xác định phản lực liên kết tại A và B.

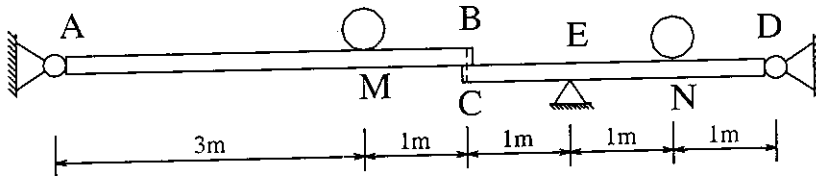
$$\text{ĐS: } X_A = -287 \text{ KN; } Y_A = 6 \text{ KN; } \\ X_B = 216 \text{ KN; } Y_B = 145 \text{ KN.}$$



Hình bài 58

59. Dầm AB chiều dài 4m trọng lượng 2000 N có thể quay xung quanh trục nằm ngang A còn đầu mút B tựa lên dầm CD. Biết CD = 3m nặng 1600N tựa lên điểm E và nối với tường bằng bản lề D. Tại điểm M và N đặt các vật nặng, trọng lượng mỗi vật 800N. Biết AM = 3m, ED = 2m, ND = 1m. Xác định phản lực ở các giá tựa.

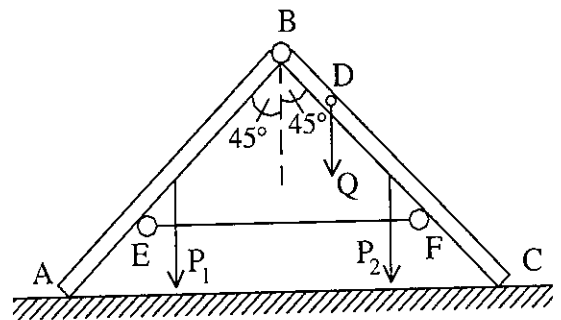
$$\text{ĐS: } R_A = 1200 \text{ N; } R_B = 1600 \text{ N; } N_E = 4000 \text{ N; } R_D = 0.$$



Hình bài 59

60. Trên mặt ngang nhẵn người ta dựng một thang kép gồm hai nửa thang AB và BC, nối với nhau bằng bản lề B và sợi dây EF. Các thanh đều dài 3m và nặng $P_1 = P_2 = 120$ N. Cho AE = CF = 1m. Tại điểm D cách B đoạn 0,6m có một người nặng $Q = 720$ N đứng. Xác định các phản lực ở A, C, B và sức căng dây EF.

$$\text{ĐS: } N_A = 408 \text{ N; } N_C = 552 \text{ N; } X_B = 552 \text{ N; } \\ Y_B = 288 \text{ N; } T = 522 \text{ N}$$

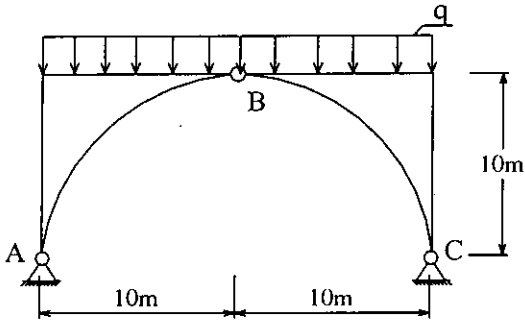


Hình bài 60

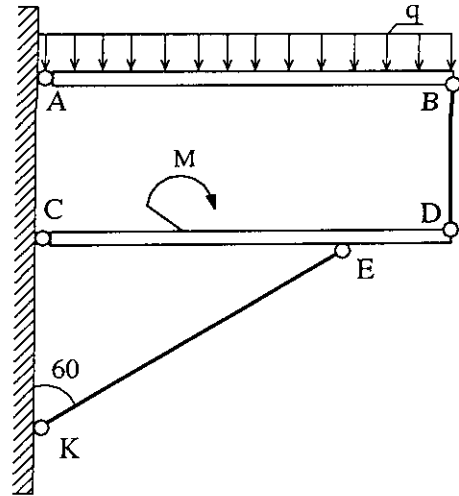
61. Một chiếc cầu gồm hai phần nối nhau bằng bản lề B. Gối cố định A, C. Trên toàn chiều dài của cầu tác dụng tải trọng phân bố đều $q = 10$ KN/m.

Kích thước cho trên hình vẽ. Tìm phản lực liên kết ở A, B, C.

$$\text{ĐS: } X_A = X_C = 50 \text{ KN; } Y_A = Y_C = 100 \text{ KN; } X_B = 50 \text{ KN; } Y_B = 0.$$



Hình bài 61



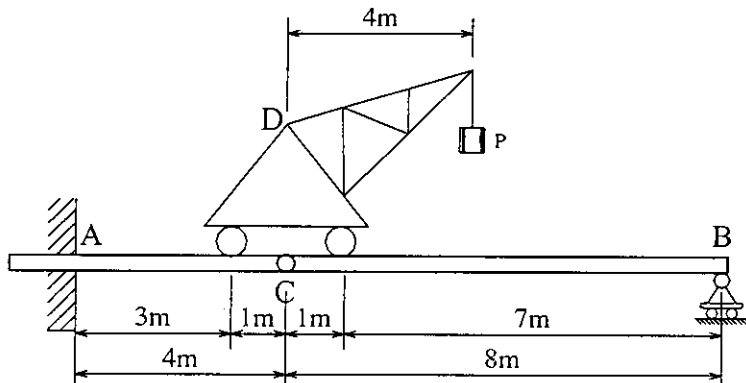
Hình bài 62

62. Ba thanh AB, CD và KE không trọng lượng liên kết với nhau bằng bản lề E và thanh không trọng lượng DB. Cho $AB = CD = 4\text{m}$, $AC = BD$, $ED = 1\text{m}$. Biết $M = 10\text{ KN.m}$; $q = 2\text{ KN/m}$; $\alpha = 60^\circ$. Xác định phản lực tại A, C và ứng lực trong các thanh BD, EK.

$$\text{ĐS: } X_A = 0; Y_A = 4\text{ KN; } X_C = 15\text{ KN; } Y_C = 4,7\text{ KN; } S_{BD} = 4\text{ KN; } S_{KE} = 17,3\text{ KN.}$$

63. Một cần trục đặt trên hệ hai dầm nằm ngang AC và CB nối với nhau bằng bản lề C, bị ngàm ở A và được đỡ bởi gối di động B. Bỏ qua trọng lượng hai dầm, biết trọng lượng cần trục là $Q = 50\text{ KN}$ tác dụng trên đường thẳng đứng qua C, trọng lượng vật được cẩu là $P = 10\text{ KN}$. Kích thước như trên hình vẽ. Tìm phản lực liên kết tại A, B, C.

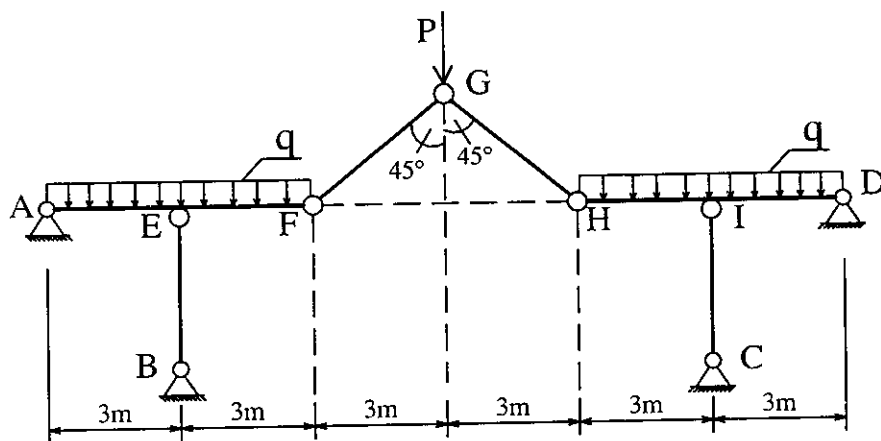
$$\text{ĐS: } X_A = 0; Y_A = 53,75\text{ KN; } M_A = 205\text{ KN.m; } N_B = 6,25\text{ KN; } X_C = 0; Y_C = 43,75\text{ KN.}$$



Hình bài 63

64. Cho hệ thanh có kích thước và chịu lực như hình vẽ. Biết $P = 8 \text{ KN}$; $q = 2 \text{ KN/m}$. Xác định phản lực tại A, B, C và D.

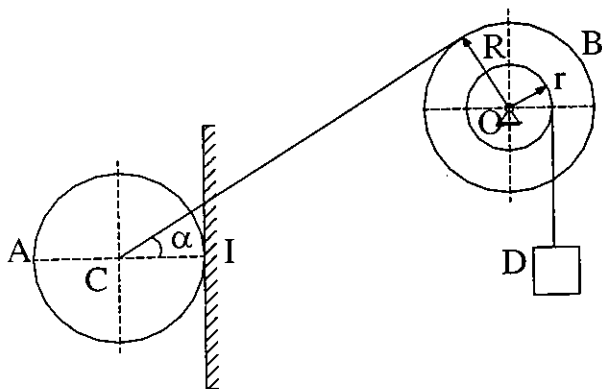
ĐS: $X_A = X_D = 4 \text{ KN}$; $Y_A = Y_D = 4 \text{ KN}$; $R_B = R_C = 20 \text{ KN}$.



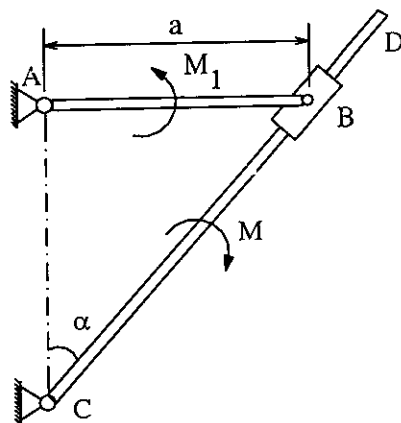
Hình bài 64

65. Tời hai bậc B treo vật D trọng lượng Q và nối với trục C của con lăn A trọng lượng P như hình vẽ. Nếu hệ cân bằng, tìm áp lực do A tác dụng vào tường và góc α tạo bởi nhánh dây nối giữa hai vật A, B với phương ngang. Bỏ qua ma sát tại O và I.

ĐS: $N = \frac{Qr \cos \alpha}{R}$; $\sin \alpha = \frac{PR}{Qr}$.



Hình bài 65



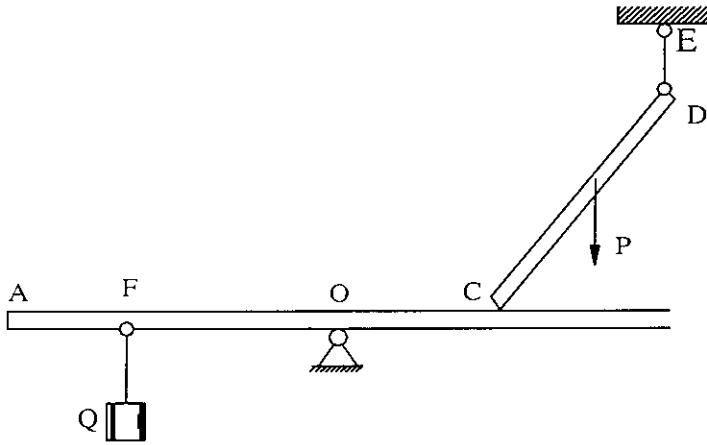
Hình bài 66

66. Cho cơ cấu tay quay culit như hình vẽ. Xác định mômen M_1 của ngẫu lực đặt vào AB để cân bằng với mô men của ngẫu lực M_2 đặt trên CD và phản lực tại A, C khi $AC \perp AB$. Bỏ qua ma sát và trọng lượng các thanh.

ĐS: $R_A = R_C = \frac{M \sin \alpha}{a}$; $M_1 = M \sin^2 \alpha$.

67. Thanh AB được gắn bản lề ở O. Tại điểm C với $OC = l$ có thanh CD tựa lên. Đầu D của thanh CD được treo bởi dây thẳng đứng DE. Trọng lượng của thanh CD là P. Xác định khoảng cách từ O đến điểm F treo vật nặng trọng lượng Q để thanh AB cân bằng tại vị trí nằm ngang. Bỏ qua trọng lượng của thanh AB.

$$\text{ĐS: } OF = \frac{Pl}{2Q}.$$

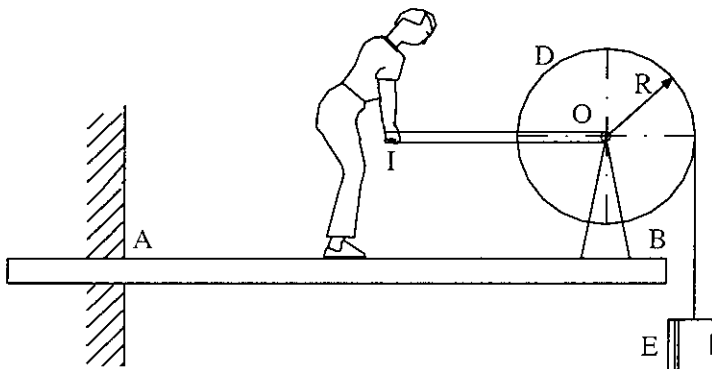


Hình bài 67

68. Người công nhân có trọng lượng Q, đứng trên dầm ngang $AB = L$, tác dụng một lực thẳng đứng vào tay quay $OI = l$, ở vị trí nằm ngang để giữ cho vật E có trọng lượng P_2 được cân bằng. Tang quay D có bán kính R và trọng lượng P_1 . Người công nhân đứng trên dầm tại vị trí cách ngàm A một đoạn bằng a. Bỏ qua trọng lượng dầm AB, trọng lượng tay quay OI. Tìm phản lực tại A và O.

$$\text{ĐS: } X_A = 0; Y_A = Q + P_1 + P_2; M_A = Qa + P_1L + P_2(L + R);$$

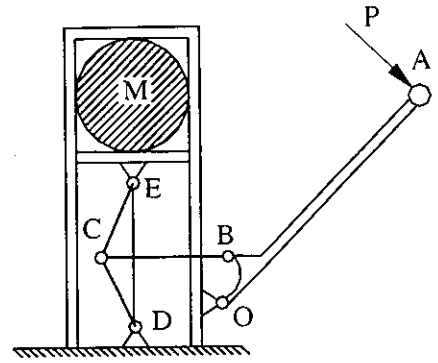
$$X_O = 0; Y_O = P_1 + P_2\left(1 + \frac{R}{l}\right).$$



Hình bài 68

69. Tìm độ lớn của lực ép lên vật M trong máy ép cho trên hình vẽ khi tác dụng lực P vuông góc với tay đòn OA có trục O cố định. Tại vị trí đang xét của máy ép, thanh kéo BC vuông góc với OB và chia đôi góc ECD, OA = a, OB = b và góc CED = CDE = α . Bỏ qua trọng lượng các thanh và tay đòn OA.

$$\text{ĐS: } N = \frac{P \cdot a}{2b \cdot \text{tg}\alpha}$$



Hình bài 69

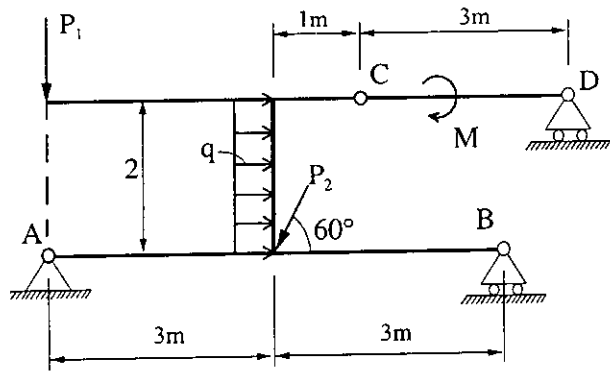
70. Cho hệ kết cấu chịu lực như hình vẽ.

Biết: $q = 2 \text{ kN/m}$; $P_1 = 10 \text{ kN}$;
 $P_2 = 12 \text{ kN}$; $M = 18 \text{ kN.m}$.

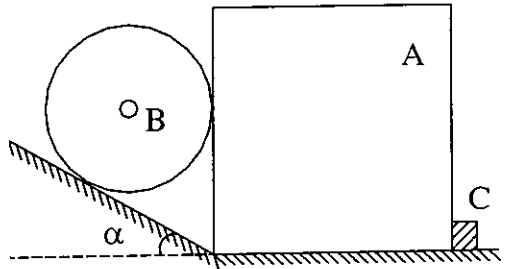
Bỏ qua trọng lượng bản thân các kết cấu. Tìm phản lực liên kết tại A, B, C, D.

$$\text{ĐS: } X_A = 2\text{KN}; Y_A = 26,5\text{KN}; Y_B = 1,8\text{KN};$$

$$X_C = 0; Y_C = -6\text{KN}; Y_D = 6\text{KN}.$$



Hình bài 70



Hình bài 71

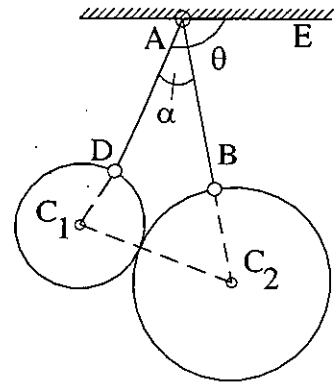
71. Khối lập phương A có cạnh a, trọng lượng Q nằm trên mặt phẳng ngang nhẵn. Quả cầu B có trọng lượng P, bán kính r đặt trên mặt phẳng nghiêng nhẵn, lập góc α với phương ngang và tựa vào một phía vật A. Phía bên kia của A tựa vào gờ C. Tìm giá trị của Q để vật A không bị đổ. Bỏ qua kích thước của C.

$$\text{ĐS: } Q \geq \frac{2Pr \text{tg}\alpha \text{ctg}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{a}$$

72. Hai quả cầu đồng chất nhẵn C_1 và C_2 , bán kính tương ứng là R_1, R_2 và trọng lượng P_1, P_2 . Hai quả cầu cùng treo vào điểm A bằng các dây AB và AD. Cho biết $AB = l_1$, $AD = l_2$; $l_1 + R_1 = l_2 + R_2$, góc $\widehat{BAD} = \alpha$. Hãy xác định góc θ lập bởi dây AD với mặt phẳng ngang AE, lực căng T_1 và T_2 của các dây và áp lực tương hỗ giữa hai quả cầu.

$$\text{ĐS: } \operatorname{tg}\theta = -\frac{P_2 + P_1 \cos\alpha}{P_1 \sin\alpha}; \quad T_1 = P_1 \frac{\sin\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}};$$

$$N = \frac{-P_2 \cos\theta}{\cos\frac{\alpha}{2}}; \quad T_2 = \frac{P_2 \sin\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$



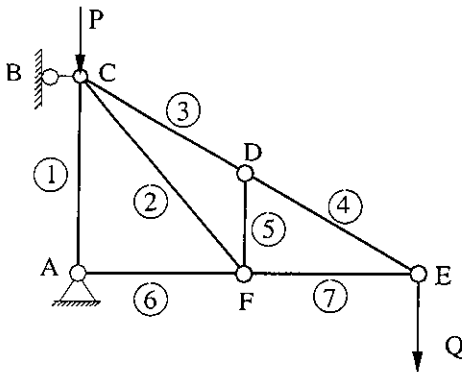
G. BÀI TOÁN DÀN

Hình bài 72

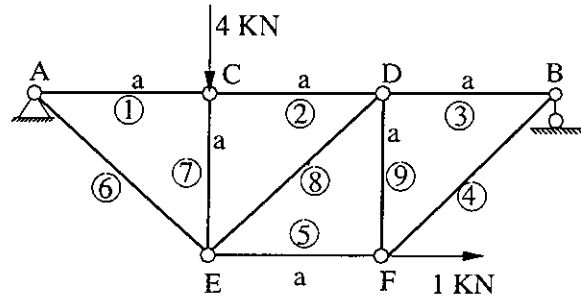
73. Xác định phản lực liên kết ở các gối tựa và lực dọc trong các thanh của dàn phẳng gồm 7 thanh gắn khớp với nhau, chịu tác dụng các lực P, Q tại các nút C và E như hình vẽ. Bỏ qua trọng lượng các thanh. Biết góc $\widehat{ACF} = \widehat{DEF} = \alpha$, $\widehat{CAF} = 90^\circ$.

$$\text{ĐS: } R_A = \sqrt{(P+Q)^2 + Q^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha}; \quad R_{BC} = Q \operatorname{ctg} \alpha. \quad T_1 = -(P+Q);$$

$$T_2 = T_5 = 0; \quad T_3 = T_4 = \frac{Q}{\sin \alpha}; \quad T_6 = T_7 = -Q \operatorname{ctg} \alpha;$$



Hình bài 73



Hình bài 74

74. Xác định phản lực tại các gối A, B và lực dọc trong tất cả các thanh của dàn phẳng chịu tác dụng của lực như hình vẽ.

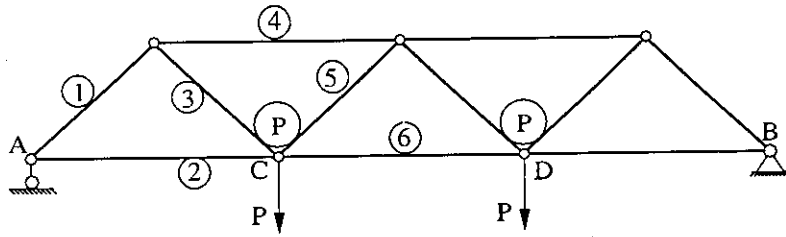
$$\text{ĐS: } X_A = -1 \text{ KN}; \quad Y_A = 3 \text{ KN}; \quad N_B = 1 \text{ KN}.$$

Chỉ số thanh	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ứng lực (KN)	-2	-2	-1	1,41	2	4,24	-4	1,41	-1

75. Hai tải trọng thẳng đứng như nhau $P = 10$ tấn đặt tại các nút C và D của dàn cầu như hình vẽ. Các thanh nghiêng đều lập góc 45° với phương nằm ngang.

Hãy xác định ứng lực trong các thanh 1, 2, 3, 4, 5, 6 do các tải trọng trên gây ra.

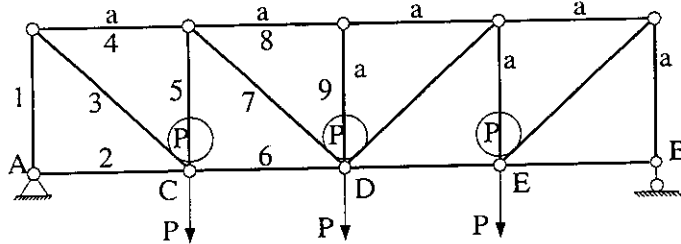
$$\text{ĐS: } S_1 = -14,1T; \quad S_2 = 10T; \quad S_3 = 14,1T; \quad S_4 = -20T; \quad S_5 = 0; \quad S_6 = 20T.$$



Hình bài 75

76. Ba tải trọng thẳng đứng $P = 10T$ đặt tại các nút C, D và E của dàn cầu như trên hình vẽ. Các thanh nghiêng đều lập góc 45° với phương nằm ngang. Hãy tìm ứng lực trong các thanh 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 và 9 do các tải trọng gây ra.

$$\begin{aligned} \text{ĐS: } S_1 &= -15T; S_2 = 0; S_3 = 21,2T; \\ S_4 &= -15T; S_5 = -5T; S_6 = 15T; \\ S_7 &= 7,1T; S_8 = -20T; S_9 = 0. \end{aligned}$$

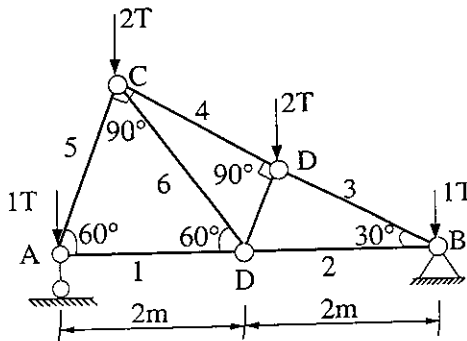


Hình bài 76

77. Hãy xác định phản lực của các gối tựa và ứng lực trong các thanh của dàn chịu lực như hình vẽ.

$$\text{ĐS: } R_A = 3,25T; R_B = 2,75T.$$

Chỉ số thanh	1	2	3	4	5	6	7
Ứng lực (T)	1,3	3,03	-3,5	-2,5	-2,6	1,73	-1,73

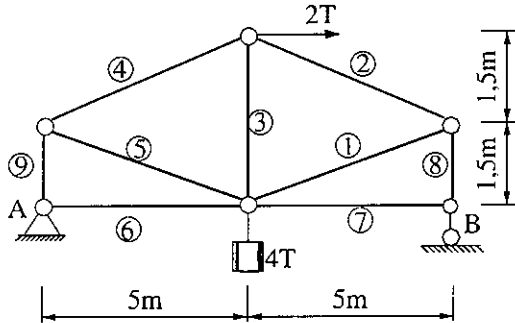


Hình bài 77

78. Hãy xác định bằng phương pháp giải tích phân lực của các gối tựa và ứng lực trong các thanh của một kết cấu chịu lực như hình vẽ.

ĐS: $X_A = -2 \text{ T}$; $Y_A = 1,4 \text{ T}$; $Y_B = 2,6 \text{ T}$.

Chỉ số thanh	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ứng lực (T)	4,5	-4,5	2	-2,44	2,44	2	0	-2,6	-1,4

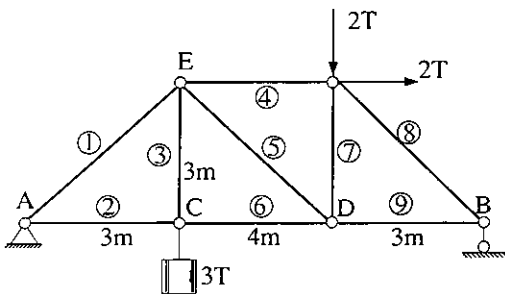


Hình bài 78

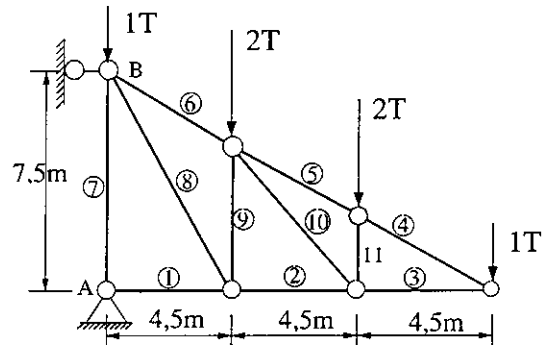
79. Hãy xác định phân lực của các gối tựa và ứng lực trong các thanh của một dàn cầu chịu lực như trên hình vẽ.

ĐS: $Y_A = 2,1 \text{ T}$; $X_B = -2 \text{ T}$; $Y_B = 2,9 \text{ T}$.

Chỉ số thanh	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ứng lực (T)	-2,97	2,1	2,1	-2,1	1,5	0,9	0	-4,1	0,9



Hình bài 79



Hình bài 80

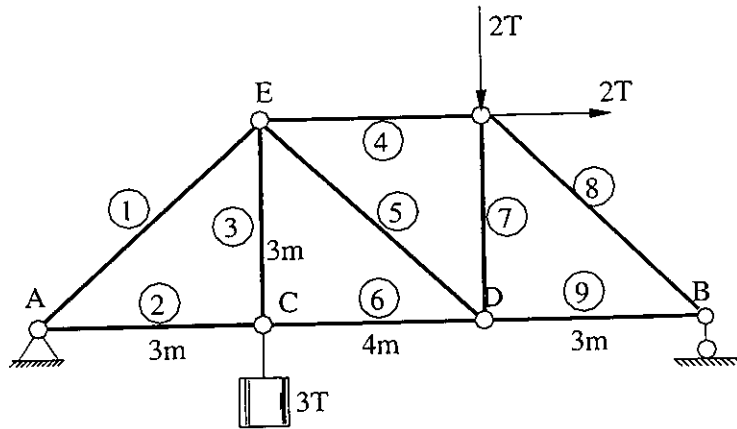
80. Hãy xác định phân lực của các gối tựa và ứng lực trong các thanh của một dàn mái chịu lực như hình vẽ.

ĐS: $X_A = 5,4 \text{ T}$; $Y_A = 6 \text{ T}$; $X_B = -5,4 \text{ T}$.

Chỉ số thanh	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ứng lực (T)	-5,4	-3,6	-1,8	2,06	2,06	4,1	-6	3,5	-3	2,7	-2

81. Hãy xác định phản lực của các gối tựa và ứng lực trong các thanh của một dàn cầu chịu lực như trên hình vẽ.

ĐS: $Y_A = 2,1T$; $X_B = -2T$; $Y_B = 2,9T$.



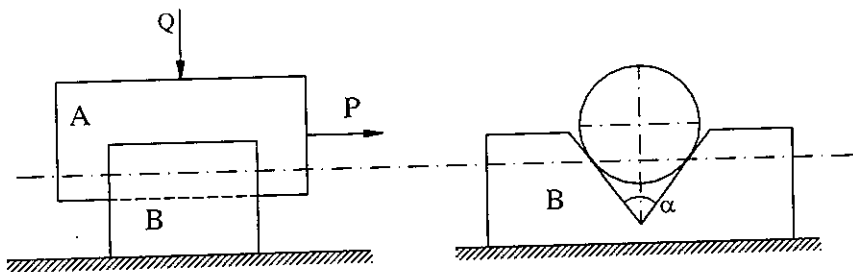
Hình bài 81

Chỉ số thanh	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ứng lực (T)	-2,97	2,1	2,1	-2,1	1,5	0,9	0	-4,1	0,9

H. BÀI TOÁN MA SÁT

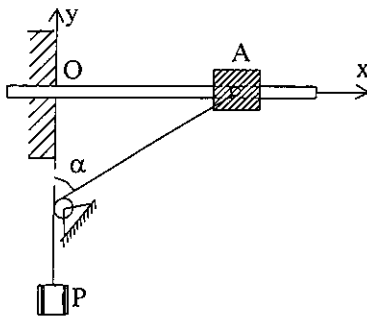
82. Trục A trọng lượng Q đặt trên máng trượt nằm ngang B tạo bởi hai mặt phẳng nghiêng hợp với nhau một góc α như hình vẽ. Biết hệ số ma sát trượt là f. Tìm lực ngang P có thể kéo trục A.

ĐS: $P \geq \frac{fQ}{\sin \alpha / 2}$

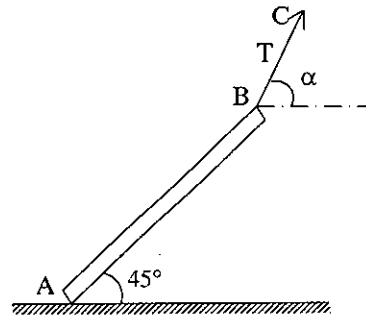


Hình bài 82

83. Trên trục nằm ngang không nhẵn có con chạy A, trọng lượng P. Nhờ sợi dây vòng qua ròng rọc B con chạy bị kéo bởi vật cùng trọng lượng P. Biết hệ số ma sát trượt $f = \tan \varphi$. Tìm góc nghiêng α của đoạn dây AB với đường thẳng đứng khi cân bằng



Hình bài 83



Hình bài 84

84. Thanh đồng chất AB có trọng lượng P, tựa lên nền không nhẵn nằm ngang ở đầu A và được giữ cân bằng ở vị trí nghiêng 45° nhờ dây BC. Tìm góc nghiêng α của dây khi thanh ở trạng thái sắp trượt.

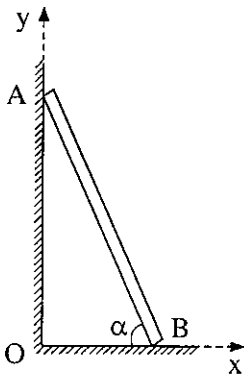
$$\text{ĐS: } \operatorname{tg} \alpha = 2 + \frac{1}{f}$$

85. Một thang AB trọng lượng P tựa lên một bức tường nhẵn còn một đầu tựa lên sàn không nhẵn nằm ngang. Lực ma sát tại đầu B không lớn hơn fN trong đó f là hệ số ma sát trượt tĩnh còn N là phản lực pháp tuyến. Hỏi phải đặt thang nghiêng một góc α bằng bao nhiêu để một người có thể đi từ B đến A nếu trọng lượng của người đó là Q.

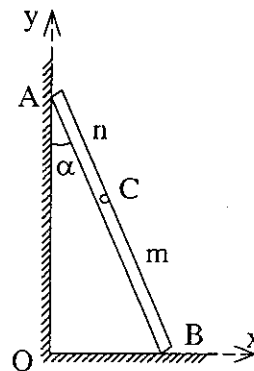
$$\text{ĐS: } \operatorname{tg} \alpha \geq \frac{P + 2Q}{2f(P + Q)}$$

86. Thang AB một đầu tựa trên tường thẳng đứng có hệ số ma sát là f_1 , đầu kia tựa trên nền ngang với hệ số ma sát là f_2 . Trọng lượng thang và người đứng trên thang là P đặt tại C với $\frac{AC}{CB} = \frac{n}{m}$. Tìm góc α_{\max} giữa thang và tường để thang vẫn còn cân bằng và phản lực tại A và B khi đó.

$$\text{ĐS: } \operatorname{tg} \alpha_{\max} = \frac{(m+n)f_2}{m - nf_1f_2}; N_A = \frac{f_2P}{1 + f_1f_2}; N_B = \frac{P}{1 + f_1f_2}$$



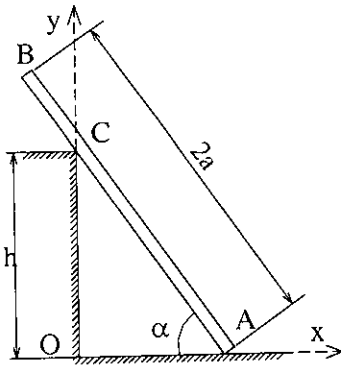
Hình bài 85



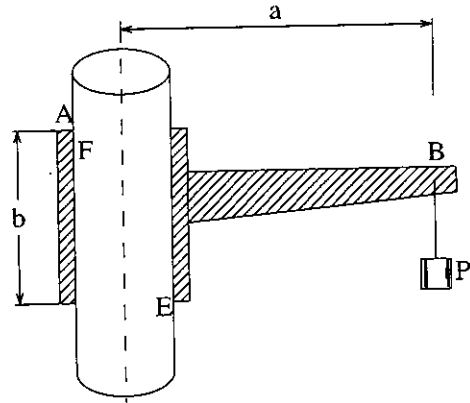
Hình bài 86

87. Dầm AB đồng chất dài $2a$ được tựa vào gờ C cố định có độ cao là h và mút dưới của nó tựa trên mặt phẳng nằm ngang tại A. Biết giá trị nhỏ nhất của góc $\alpha = \text{OAC}$ khi dầm còn cân bằng là α_0 . Tìm hệ số ma sát f tại điểm A. Bỏ qua ma sát tại C.

$$\text{ĐS: } f = \frac{a \sin^2 \alpha_0 \cos \alpha_0}{h - a \sin \alpha_0 \cos^2 \alpha_0}$$



Hình bài 87



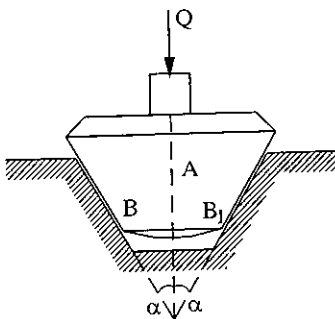
Hình bài 88

88. Giá đỡ AB trọng lượng không đáng kể, đầu B treo vật nặng P, đầu A là ống trụ chiều dài $b = 2\text{cm}$ trượt dọc cột thẳng đứng không nhẵn. Biết hệ số ma sát trượt là $f = 0,1$. Xác định khoảng cách a giữa trục của cột tới điểm treo vật P để giá đỡ cân bằng?

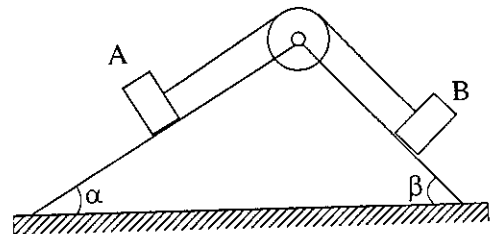
$$\text{ĐS: } a \geq 10 \text{ cm.}$$

89. Nêm A có độ nghiêng $\text{tg} \alpha = 0,05$ được chôn xuống độ sâu BB_1 bởi lực có cường độ $Q = 6\text{kN}$. Xác định áp lực pháp tuyến N lên má của chèn và cường độ lực P cần thiết để kéo chèn lên nếu hệ số ma sát $f = 0,1$.

$$\text{ĐS: } N = 20 \text{ kN; } P = 2 \text{ kN.}$$



Hình bài 89



Hình bài 90

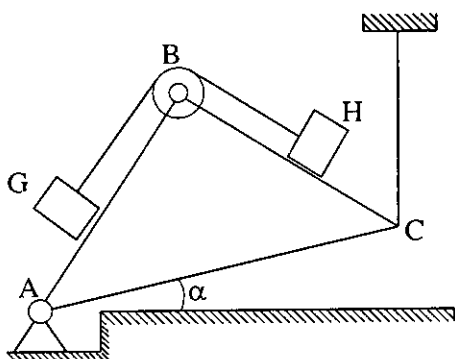
90. Hai vật A và B trọng lượng P và Q nằm trên hai mặt phẳng nghiêng, nghiêng các góc α và β so với phương ngang, được nối với nhau bằng một sợi dây được luồn

qua một ròng rọc ma sát không đáng kể. Biết góc ma sát giữa mặt phẳng nghiêng với các tải trọng là φ . Xác định tỷ số $\frac{P}{Q}$ khi hệ cân bằng.

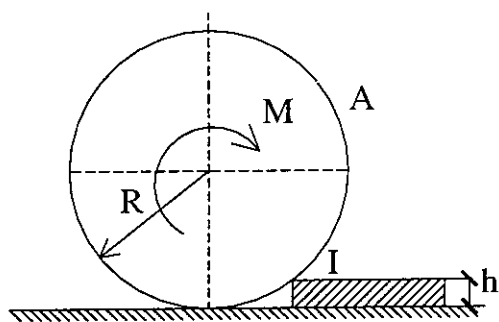
$$\text{ĐS: } \frac{\sin(\beta - \varphi)}{\sin(\alpha + \varphi)} \leq \frac{P}{Q} \leq \frac{\sin(\beta + \varphi)}{\sin(\alpha - \varphi)}$$

91. Trên hai mặt AB và BC của khung tam giác vuông cân có hai vật G và H cùng trọng lượng nối với nhau bằng sợi dây vắt qua ròng rọc B, ma sát không đáng kể. Hệ số ma sát giữa các vật và các mặt đều là f . Xác định góc nghiêng α của AC với phương ngang khi G bắt đầu trượt xuống.

$$\text{ĐS: } \text{tg}\alpha = f$$



Hình bài 91



Hình bài 92

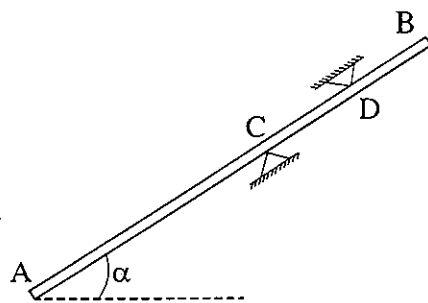
92. Con lăn A đồng chất bán kính R , trọng lượng P được đặt trên mặt phẳng ngang và tựa vào gờ chắn có độ cao h so với mặt đất. Hệ số ma sát trượt giữa vật A, gờ chắn và mặt đất đều bằng f .

Tìm giá trị mômen lớn nhất của ngẫu lực tác dụng lên vật A để vật cân bằng.

$$\text{ĐS: } M = \frac{RfP(f + \cos\alpha - f\sin\alpha)}{(1 + f^2)\cos\alpha}; \sin\alpha = \frac{R - h}{R}$$

93. Thanh đồng chất AB nặng P đặt giữa hai gối đỡ C và D. Hệ số ma sát trượt giữa thanh và gối là f . Tìm độ dài $2l$ của thanh để nó có thể cân bằng nếu góc giữa thanh và phương ngang là α , $CD = a$; $AC = b$. Bỏ qua bề dày thanh.

$$\text{ĐS: } l > a + b; 2l \geq 2b + a + \frac{a}{f} \text{tg}\alpha$$



Hình bài 93

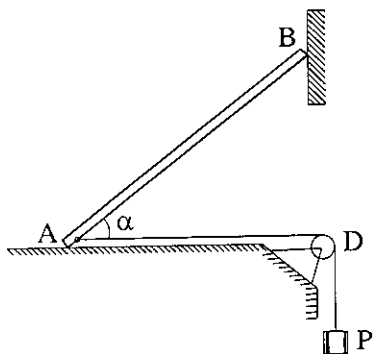
94. Thanh đồng chất AB trọng lượng Q tựa tại điểm B lên tường thẳng đứng không nhẵn. Hệ số ma sát giữa thanh và tường bằng f . Điểm

Điểm A của thanh tựa vào sàn ngang nhẵn. Thanh được giữ cân bằng nhờ dây AD vắt qua ròng rọc D. Đầu cuối dây treo vật nặng trọng lượng P.

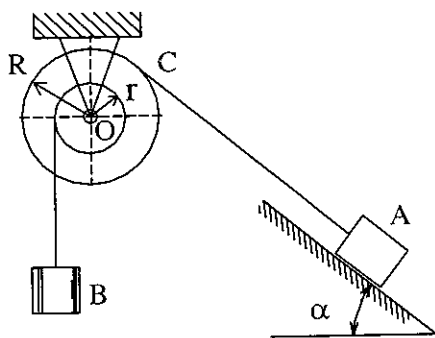
Tìm các giá trị của trọng lực P để hệ cân bằng.

$$\text{ĐS: 1) Nếu } \operatorname{tg}\alpha > f: \frac{Q}{2(\operatorname{tg}\alpha + f)} \leq P \leq \frac{Q}{2(\operatorname{tg}\alpha - f)}$$

$$2) \text{ Nếu } \operatorname{tg}\alpha < f: P \geq \frac{Q}{2(\operatorname{tg}\alpha + f)}$$



Hình bài 94



Hình bài 95

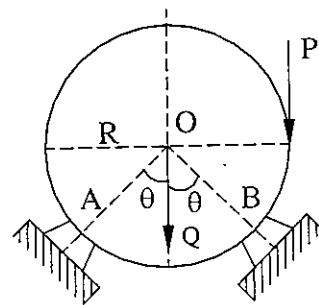
95. Vật A có trọng lượng P được buộc dây quấn vào vành ngoài bán kính R của tang quay hai bậc C. Vành trong bán kính r lại được quấn dây buộc vào vật B. Vật A nằm trên mặt phẳng nghiêng không nhẵn có hệ số ma sát là f. Tìm trọng lượng Q của vật B để cho hệ cân bằng. Cho biết $R = 2r$.

$$\text{ĐS: } 2P(\sin\alpha - f\cos\alpha) \leq Q \leq 2P(\sin\alpha + f\cos\alpha)$$

96. Con lăn trọng lượng Q, tựa trên hai gối tựa A và B có vị trí đối xứng đối với đường thẳng đứng. Hệ số ma sát giữa các điểm tựa với con lăn đều bằng f.

Lực P đặt vuông góc với đường kính nằm ngang và tiếp tuyến đường tròn của con lăn. Với giá trị nào của P con lăn bắt đầu quay.

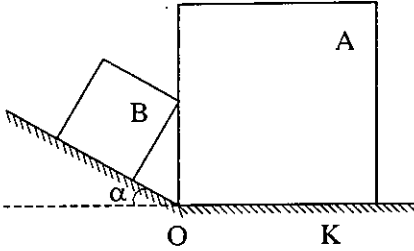
$$\text{ĐS: } P = \frac{fQ}{(1+f^2)\cos\theta - f}$$



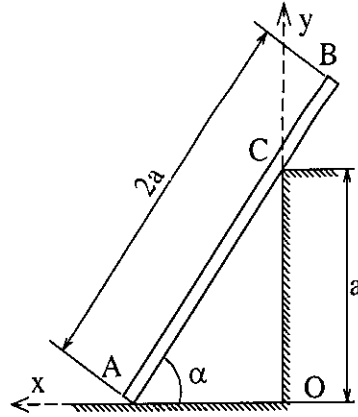
Hình bài 96

97. Hai khối lập phương đồng chất A và B trọng lượng tương ứng P và Q, khối A đặt trên mặt ngang không nhẵn với hệ số ma sát f, khối B đặt trên mặt nghiêng nhẵn lập với phương ngang góc α , cạnh của B tựa lên mặt bên của A. Tìm mối quan hệ giữa P và Q khi hệ cân bằng và khoảng cách OK. Trong đó K là điểm đặt của phản lực mặt tựa, biết các cạnh của lập phương là a và b tương ứng.

$$\text{ĐS: } P f \operatorname{ctg} \alpha \geq Q; \quad OK = \frac{a}{2} + \frac{Q b \sin \alpha}{P \cos^2 \alpha}.$$



Hình bài 97

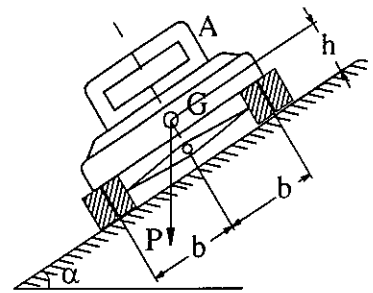


Hình bài 98

98. Thanh AB chiều dài $2a$ tựa trên mặt phẳng ngang không nhẵn tại A và điểm C tựa lên gờ tường nhẵn thẳng đứng với độ cao a . Tìm hệ số ma sát nhỏ nhất giữa thanh với sàn để nó cân bằng ở vị trí góc $\alpha = 60^\circ$.

$$\text{ĐS: } f \geq \frac{\cos \alpha \sin^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha \sin \alpha} = 0,48.$$

99. Xe ô tô trọng lượng P đỗ trên mặt phẳng nghiêng. Chiều cao trọng tâm G của xe so với đường bằng h , hệ số ma sát giữa các bánh xe với mặt đường là f . Khoảng cách giữa các bánh xe bằng $2b$. Tìm giá trị của góc nghiêng α tạo bởi mặt đường với phương nằm ngang sao cho xe A trượt và lật đổ.



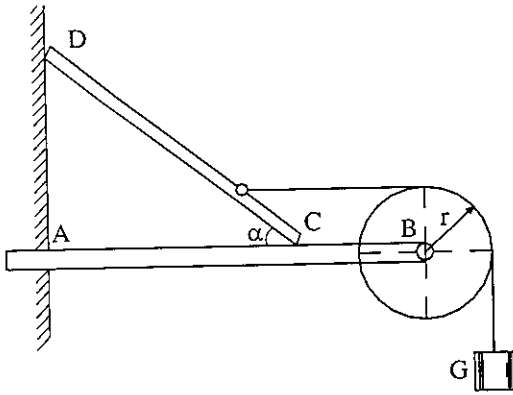
Hình bài 99

$$\text{ĐS: Xe bị lật đổ: } \frac{b}{2h} > \operatorname{tg} \alpha > h;$$

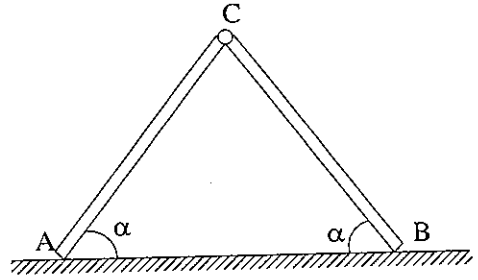
$$\text{Xe bị trượt bên: } \frac{b}{2h} > \operatorname{tg} \alpha > f.$$

100. Thanh CD có chiều dài l và trọng lượng P , đầu C tựa vào dầm ngang AB, đầu D tựa vào tường. Thanh CD còn được buộc vào dây nằm ngang vắt qua ròng rọc bán kính r và treo vật G trọng lượng Q . Hệ số ma sát trượt giữa thanh DC với dầm AB và với tường đều bằng f . Bỏ qua trọng lượng của dây, ròng rọc và AB. Tìm giá trị lớn nhất của Q để thanh CD cân bằng ở vị trí tạo góc α với dầm AB.

$$\text{ĐS: } Q_{\max} = \frac{Pl(f^2 \cos \alpha + 2f \sin \alpha - \cos \alpha)}{2[l(f \cos \alpha + \sin \alpha) - r(l + f^2)]}.$$



Hình bài 100



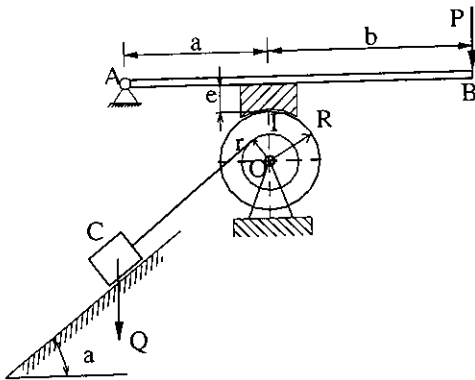
Hình bài 101

101. Hai thanh AC và BC nối với nhau bằng bản lề C, hai thanh dài như nhau và có cùng trọng lượng. Cho biết hệ số ma sát giữa thanh với sàn bằng f . Xác định góc để cho hệ cân bằng.

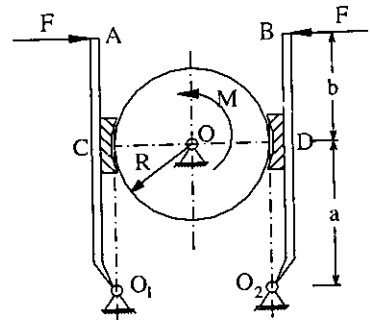
$$\text{ĐS: } \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2f}.$$

102. Cho cơ cấu máy hãm như hình vẽ. Xác định giá trị nhỏ nhất của P để vật C được giữ cân bằng trên mặt nghiêng. Cho biết hệ số ma sát giữa vật C và mặt phẳng nghiêng là f_1 ; giữa má hãm và vành xe là f_2 . Độ dày của má hãm là e . Vật C có trọng lượng Q .

$$\text{ĐS: } P_{\min} = \frac{r(a - ef_2)(\sin \alpha - f_1 \cos \alpha)Q}{R \cdot f_2(a + b)}$$



Hình bài 102



Hình bài 103

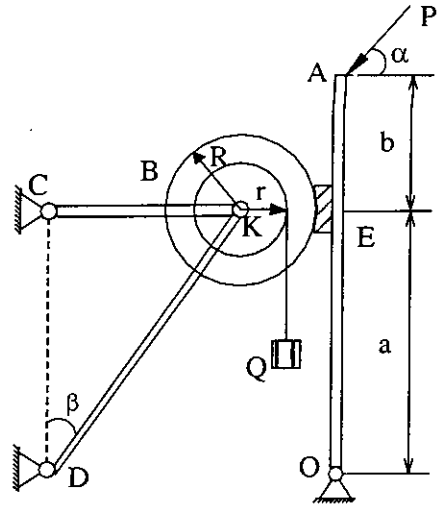
103. Cho cơ cấu hãm như hình vẽ. Lực F phải bằng bao nhiêu để hãm được bánh xe, cho biết bánh xe chịu tác dụng của mô men quay $M = 160 \text{ Nm}$, hệ số ma sát giữa má hãm và bánh xe $f = 0,2$. Biết $O_1C = O_2D = a = 0,4 \text{ m}$; $CA = DB = b = 0,6 \text{ m}$; $R = 0,2 \text{ m}$; $O_1O_2 = 0,4 \text{ m}$. Bỏ qua độ dày má hãm.

$$\text{ĐS: } F \geq 800 \text{ N.}$$

104. Tang quay B hai tầng trọng lượng G, có các bán kính R, r được giữ bởi hai thanh KC, KD không trọng lượng. Tang được quấn dây treo vật có trọng lượng Q.

Để giữ cân bằng, đầu A của cần hãm chịu tác dụng của lực P tạo góc α với phương ngang. Cần hãm OA thẳng đứng với kích thước OE = a, EA = b.

Thanh KC nằm ngang và KD tạo góc β với phương thẳng đứng. Cho biết hệ số ma sát giữa E và B là f. Bỏ qua độ dày của má hãm. Tìm lực P_{\min} để hệ cân bằng và xác định ứng lực trong các thanh KC và KD.



Hình bài 104

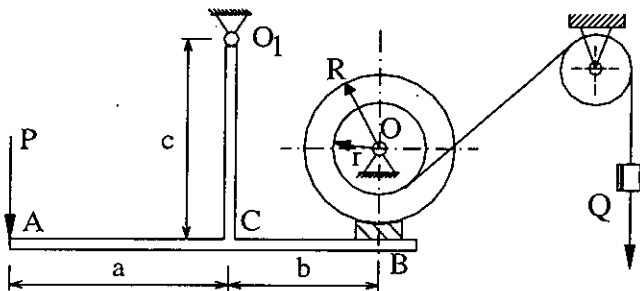
$$\text{ĐS: } P_{\min} = \frac{Qra}{R \cdot f(a+b)\cos\alpha};$$

$$S_D = \frac{Q(R-fr) + GR}{R \cdot \cos\beta};$$

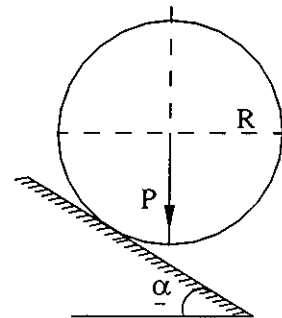
$$S_C = \frac{Q(a+b)\cos\alpha}{a} - \frac{[P(R-fr) + GR]\sin\beta}{R\cos\beta}.$$

105. Xác định trị số nhỏ nhất của lực P để hệ cân bằng và phản lực tại bản lề O, cho biết hệ số ma sát giữa guốc hãm và bánh xe là f, trọng lượng vật treo là Q. Các kích thước cho trên hình vẽ. Bỏ qua trọng lượng các thanh O_1C , AB, độ dày guốc hãm.

$$\text{ĐS: } P_{\min} = \frac{r}{aR} \left(\frac{b}{f} - c \right) Q; \quad X_O = \frac{-rQ}{R}; \quad Y_O = \frac{r}{R} \left(\frac{b}{af} - \frac{c}{a} + \frac{1}{f} \right) Q.$$



Hình bài 105



Hình bài 106

106. Hãy xác định độ lớn góc α sao cho con lăn trọng lượng P, bán kính R không lăn trên mặt phẳng nghiêng không nhẵn, biết hệ số ma sát lăn bằng k.

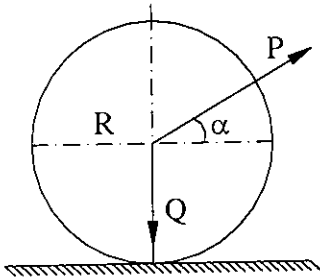
$$\text{ĐS: } \frac{k}{R} \geq \text{tg}\alpha.$$

107. Tìm trị số lực P để con lăn bán kính $R = 30\text{cm}$, nặng $Q = 300\text{N}$ lăn đều trên mặt phẳng không nhẵn với hệ số ma sát lăn $k = 0,5$ và góc giữa lực P với phương ngang là $\alpha = 30^\circ$.

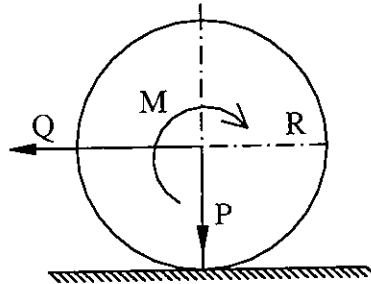
ĐS: $P = 5,72 \text{ N}$.

108. Trên mặt nằm ngang có bánh xe đồng chất tâm O bán kính R , trọng lượng P chịu tác dụng ngẫu lực M và lực Q như hình vẽ. Biết hệ số ma sát trượt là f , hệ số ma sát lăn là k . Xác định trị số mômen M và trị số Q để bánh xe cân bằng.

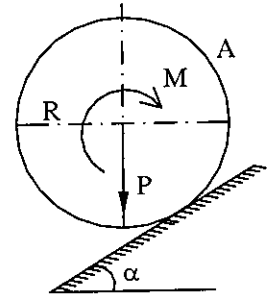
ĐS: $Q \leq fP$; $QR - kP \leq M \leq QR + kP$.



Hình bài 107



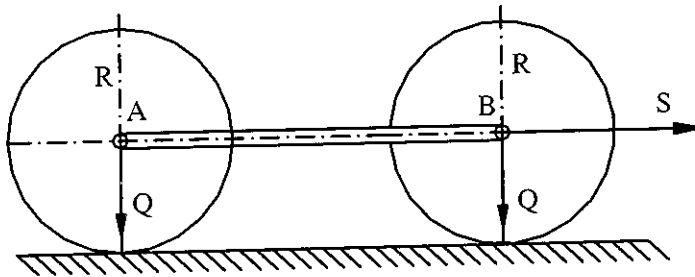
Hình bài 108



Hình bài 109

109. Con lăn hình trụ tròn đồng chất A có trọng lượng P được đặt trên mặt phẳng nghiêng góc α không nhẵn, chịu tác dụng của ngẫu lực có mômen M . Cho biết bán kính của A là R , hệ số ma sát trượt và hệ số ma sát lăn giữa vật A với mặt nghiêng là f và k . Tìm giá trị của góc α để vật A không bị trượt và tìm giá trị của mômen M để cho vật A không bị lăn.

ĐS: $\tan \alpha \leq f$; $P(R \sin \alpha - k \cos \alpha) \leq M \leq P(R \sin \alpha + k \cos \alpha)$.



Hình bài 110

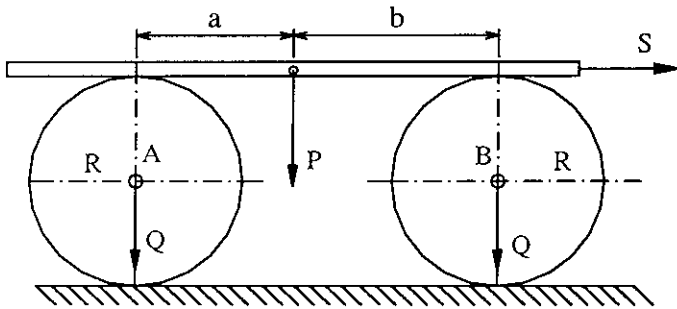
110. Trên mặt đường nằm ngang có hai bánh xe A và B đồng chất cùng trọng lượng Q bán kính R nối với nhau bằng thân xe AB (xem như thanh đồng chất) trọng lượng P . Hệ số ma sát trượt và ma sát lăn giữa bánh xe và mặt đường là f , k .

Xác định lực S nằm ngang cần đặt vào thân xe để xe ở trạng thái sắp lăn không trượt.

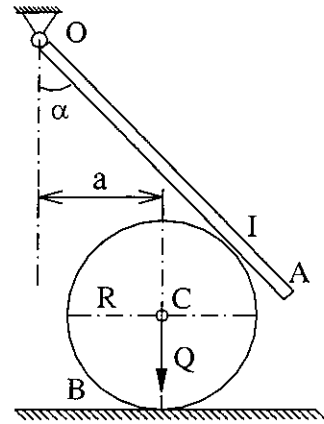
ĐS: $S = \frac{k}{R}(P + 2Q) \leq f(P + 2Q)$.

111. Sàn trọng lượng P nằm ngang trên hai bánh xe A và B. Hai bánh xe này đồng chất cùng bán kính R , trọng lượng Q , lăn không trượt trên mặt nằm ngang. Biết hệ số ma sát trượt và hệ số ma sát lăn giữa bánh xe và mặt đường, sàn lื่น lợt là f , k . vị trí trọng tâm sàn cho trên hình vẽ. Xác định lực kéo nằm ngang S để xe ở trạng thái sắp lăn không trượt.

$$\text{ĐS: } S = \frac{k}{R}(P + Q) \leq fP$$



Hình bài 111



Hình bài 112

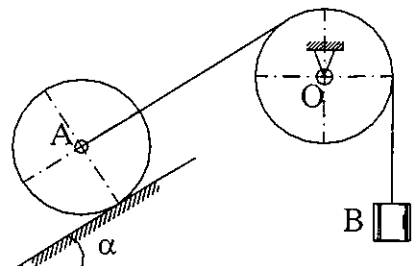
112. Thanh đồng chất $OA = l$ có trọng lượng P , tựa trên con lăn đồng chất B có bán kính R trọng lượng Q . Bỏ qua ma sát giữa OA và B. Vật B được đặt trên mặt phẳng ngang không nhẵn. Hệ cân bằng ở vị trí như hình vẽ, thanh OA tạo góc α với phương thẳng đứng, khoảng cách từ O đến đường tác dụng của lực Q là a .

Hãy tìm phân lực tại O và giá trị lớn nhất P_{\max} để B bắt đầu lăn nếu biết hệ số ma sát lăn là k .

$$\text{ĐS: } X_D = \frac{Pl \sin^2 \alpha \cos \alpha}{2(a + r \cos \alpha)}; \quad Y_0 = P - \frac{Pl \sin^3 \alpha}{2(a + r \cos \alpha)} \cdot P_{\max} = \frac{2kQ(a + r \cos \alpha)}{l \sin^2 \alpha (r \cos \alpha - k \sin \alpha)}$$

113. Con lăn A có trọng lượng P và bán kính R nằm trên mặt phẳng nghiêng không nhẵn, lập góc α với phương ngang. Trục của con lăn quấn dây vắt qua ròng rọc, đầu cuối dây treo vật B có trọng lượng Q . Hãy xác định Q để hình trụ không lăn nếu hệ số ma sát lăn bằng k .

$$\text{ĐS: } -\frac{k}{R}P \cos \alpha + P \sin \alpha \leq Q \leq P \sin \alpha + \frac{kP \cos \alpha}{R}$$



Hình 113

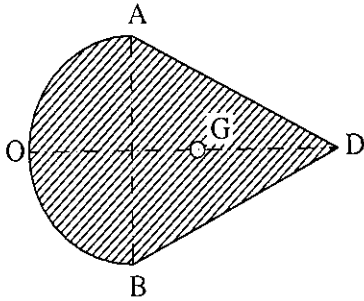
K. TRỌNG TÂM

114. Hãy xác định trọng tâm G của diện tích giới hạn bởi nửa đường tròn AOB bán kính R và hai đoạn thẳng AD và DB dài bằng nhau, trong đó OD = 3R.

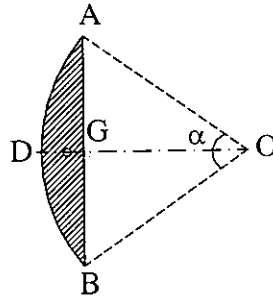
$$\text{ĐS: } OG = \frac{3\pi + 16}{3\pi + 12} R = 1,19R.$$

115. Hãy xác định trọng tâm G của diện tích hình viên phân (một mảnh hình tròn) ADB bán kính AO = R = 30cm, góc AOB = 60°.

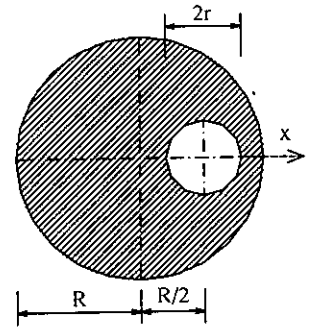
$$\text{ĐS: } OC = 27,7\text{cm}$$



Hình bài 114



Hình bài 115



Hình bài 116

116. Hãy xác định trọng tâm G đĩa tròn đồng chất có lỗ hổng tròn, cho trước bán kính đĩa là $r_1 = R$, bán kính lỗ hổng bằng r_2 , tâm lỗ hổng nằm cách tâm đĩa khoảng $\frac{r_1}{2}$.

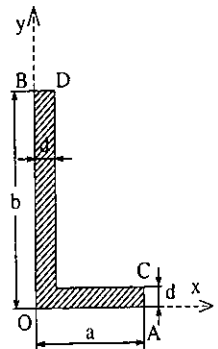
$$\text{ĐS: } x_G = -\frac{r_1 r_2^2}{2(r_1^2 - r_2^2)}$$

117. Hãy xác định trọng tâm G của tiết diện ngang hình thước thợ có chiều OA = a, OB = b và độ dày AC = BD = d.

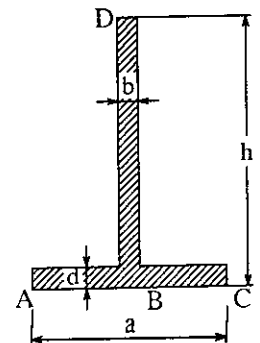
$$\text{ĐS: } x_G = \frac{a^2 + bd - d^2}{2(a + b - d)}; \quad y_G = \frac{b^2 + ad - d^2}{2(b + a - d)}$$

118. Hãy xác định khoảng cách từ trọng tâm G của tiết diện ABCD hình chữ T đến cạnh AC, biết rằng chiều cao BD = h, chiều rộng của cánh AC = a, độ dày cánh bằng d và độ dày thành bằng b.

$$\text{ĐS: } y_G = \frac{ad^2 + bh^2 - bd^2}{2(ad + bh - bd)}$$



Hình bài 117



Hình bài 118

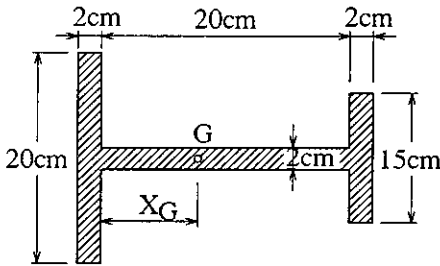
119. Hãy xác định trọng tâm G của tiết diện hai chữ T, kích thước như hình vẽ.

ĐS: $X_G = 9\text{cm}$

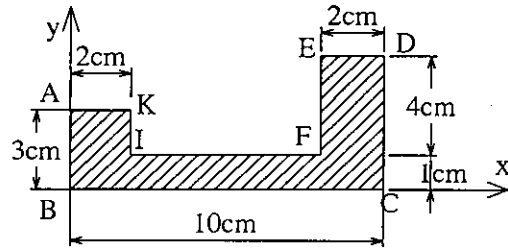
120. Hãy xác định trọng tâm G của bản đồng chất như trong hình vẽ.

Biết $AK = 2\text{ cm}$, $IK = 1,0\text{ cm}$, $AB = 3\text{cm}$, $BC = 10\text{cm}$, $EF = 4\text{cm}$, $ED = 2\text{cm}$.

ĐS: $x_G = 5\frac{10}{13}\text{ cm}$; $y_G = 1\frac{10}{13}\text{ cm}$.



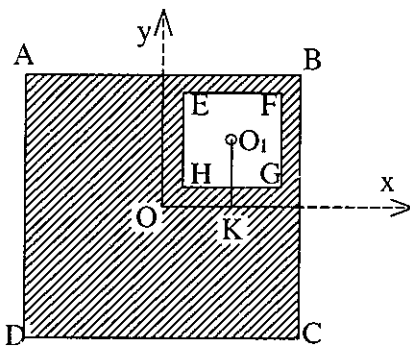
Hình bài 119



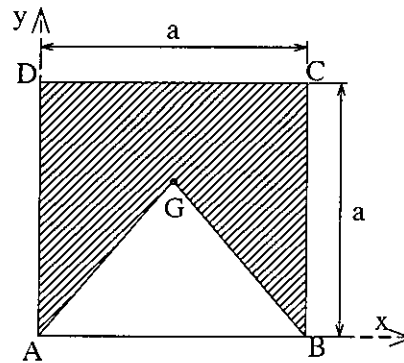
Hình bài 120

121. Trên một bảng vuông đồng chất ABCD có cạnh $AB = 2\text{m}$, người ta cắt một lỗ hổng vuông EFGH, cạnh của nó bằng $0,7\text{m}$ và song song với cạnh của ABCD. Hãy xác định trọng tâm của phần bảng còn lại; biết rằng $OK = O_1K = 0,5\text{ m}$. Trong đó O và O_1 là tâm của các hình vuông; OK và O_1K song song với cạnh tương ứng của hình vuông.

ĐS: $x = y = - 0,07\text{cm}$



Hình bài 121



Hình bài 122

122. Cho tấm hình vuông ABCD cạnh a; hãy tìm điểm G bên trong hình, sao cho nó là trọng tâm G của hình vuông đã bị cắt đi tam giác cân AGB.

ĐS: $x_G = 0,5a$; $y_G = 0,61a$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Văn Khang. *Cơ sở cơ học kỹ thuật*. Tập 1. NXB Đại học Quốc gia, Hà Nội, 2005.
2. Đỗ Sanh, Nguyễn Văn Đình, Nguyễn Văn Khang. *Cơ học tập 1*. NXB Giáo dục, Hà Nội, 1996.
3. Đỗ Sanh, Nguyễn Nhật Lệ. *Bài tập cơ học*. Tập 1. NXB Giáo dục, Hà Nội, 1996.
4. Đặng Quốc Lương. *Cơ học lý thuyết*. Tập 1. NXB Xây dựng, Hà Nội, 1995.
5. Bộ môn Cơ lý thuyết - Đại học Giao thông Vận tải Hà Nội. *Bài tập cơ học lý thuyết*. Đại học Giao thông Vận tải, 2000.
6. Bộ môn Cơ học lý thuyết - Đại học Thủy lợi Hà Nội. *Bài tập Cơ học lý thuyết*. NXB Xây dựng, Hà Nội, 2004.
7. X.M Targ. *Theoretical Mechanics, A Short Course*. Mir Publishers, Moscow, 1976.
8. Бражниченко Н. А., КАН. В.Л. *Сборник задач по теоретической механике*. Государственное союзное издательство. Ленинград, 1962
9. Мецерский И.В. *Сборник задач по теоретической механике*. Издательство "Наука". Москва, 1967
10. Бать М. И., Джанелидзе Г. О., Кельзон А. С. *Теоретическая механика в примерах и задачах Статика и кинематика*, 1995.

MỤC LỤC

Trang

Lời nói đầu

Mở đầu

Chương I. Các khái niệm cơ bản, hệ tiên đề tĩnh học	7
1.1. Các khái niệm cơ bản và các định nghĩa	7
1.2. Hệ tiên đề tĩnh học	10
1.3. Nguyên lí giải phóng liên kết	13
1.4. Mô men của lực và ngẫu lực	16
Chương II. Thu gọn hệ lực, điều kiện cân bằng của hệ lực	21
2.1. Hai đặc trưng cơ bản của hệ lực	21
2.2. Thu hệ lực không gian	23
2.3. Điều kiện cân bằng và các phương trình cân bằng của hệ lực không gian	28
2.5. Các bài toán đặc biệt của tĩnh học	40
Chương III. Ma sát	51
3.1. Mở đầu	51
3.2. Ma sát trượt	52
3.3. Ma sát lăn	55
Chương IV. Trọng tâm	58
4.1. Tâm của hệ lực song song	58
4.2. Trọng tâm của vật rắn	59
Phần bài tập	65
Tài liệu tham khảo	103

CƠ HỌC CƠ SỞ

TẬP I : TÍNH HỌC

(Tái bản)

Chịu trách nhiệm xuất bản :

BÙI HỮU HẠNH

Biên tập : TRỊNH KIM NGÂN
Chế bản : ĐÌNH THỊ PHƯỢNG
Sửa bản in : TRỊNH KIM NGÂN
Trình bày bìa : VŨ BÌNH MINH

In 300 cuốn khổ 19 x 27cm tại Xưởng in Nhà xuất bản Xây dựng. Giấy chấp nhận đăng ký kế hoạch xuất bản số 50-2009/CXB/87-92/XD ngày 13- 1- 2009. Quyết định xuất bản số 284/QĐ-XB XD ngày 13/10/2009. In xong nộp lưu chiểu tháng 10-2009.

